7 класс.

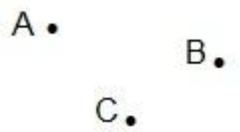
1) Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур (гео – «земля», метрео – «мерить»).

2) Планиметрия – это раздел геометрии о свойствах плоских фигур.

3) Стереометрия – это раздел геометрии о свойствах пространственных фигур.

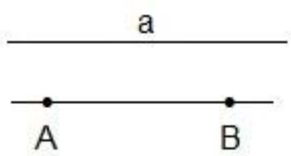
4) Определение – это описание смысла нового понятия через ранее известные понятия.

5) Понятия, принимаемые без определения, называются **основными понятиями**.
<u>Основные неопределяемые понятия геометрии</u>: **точка**, **прямая**, **плоскость**.

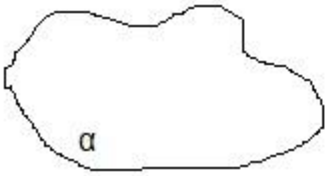


6) Точки обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, ….

7) Прямую обозначают одной строчной латинской буквой или двумя заглавными латинскими буквами, отмеченными на этой прямой. *Прямая **a**, прямая AB.*



8) Прямую можно продолжать бесконечно в обе стороны, а на рисунках показывают лишь её часть.



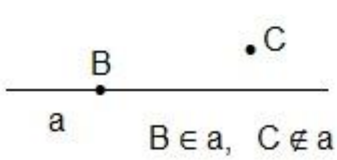
9) Плоскость можно представить как поверхность стола, стены, как лист бумаги и т.д. Однако они являются лишь частью плоскости. В действительности плоскость можно продолжать бесконечно во все стороны. Плоскость обозначают греческими буквами: α, β, γ, ….

10) Так как в курсе планиметрии (planum – «плоскость») все фигуры рассматриваются на плоскости, то нет необходимости изображать на каждом чертеже плоскость – считается, что она уже дана.

11) Аксиома – это утверждение, не требующее доказательства.

12) Теорема – это утверждение, которое необходимо доказать. Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей: *условия* и *заключения*. В *условии* теоремы говорится о том, что дано. В *заключение* теоремы говорится о том, что должно быть доказано.

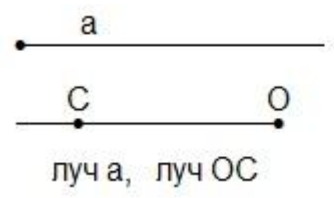
<u>Аксиомы принадлежности (13а, 13б)</u>.



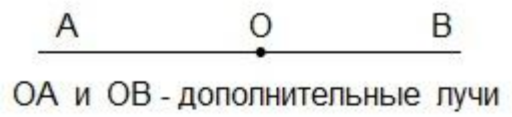
13а) Какова бы ни была прямая, есть точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие ей.

13б) Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

14) Полупрямой (лучом) называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, которые лежат по одну сторону от данной её точки, называемой начальной точкой полупрямой (луча).



15) Полупрямые (лучи), так же как и прямые, обозначаются строчными латинскими буквами или двумя заглавными латинскими буквами: начальной точкой и еще какой-нибудь точкой, принадлежащей полупрямой (лучу). При этом начальная точка ставится на первом месте.



16) Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются дополнительными полупрямыми (лучами).

Аксиомы порядка (17а, 17б).

17а) Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

17б) Точка, лежащая на прямой, делит эту прямую на две полупрямые (на два луча).

18) Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

19) Отрезок – это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками, называемыми концами отрезка.

20) Фигуры называются равными, если при наложении их друг на друга соответствующие точки фигур совпадут.

21) Два отрезка называются равными, если при наложении друг на друга их концы совпадут.

22) Для того чтобы найти длину данного отрезка, надо найти число, определяющее, сколько единичных отрезков содержится в данном отрезке.

Аксиомы измерения отрезков (23а, 23б).

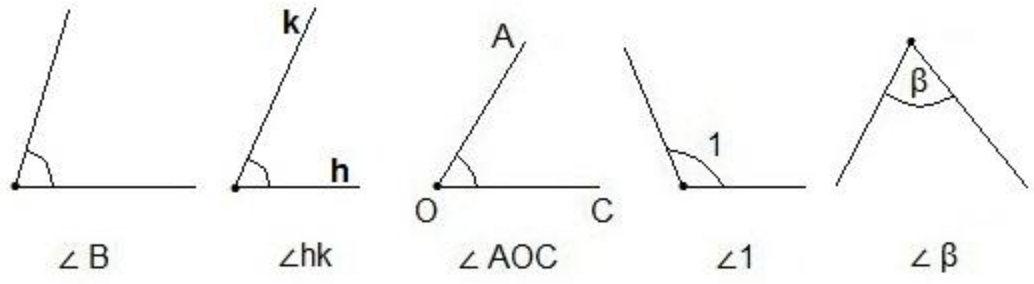
23а) Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля.

23б) Если точка, принадлежащая отрезку, лежит между его концами, то длина данного отрезка равна сумме длин образовавшихся отрезков.

24) Углом называют часть плоскости, ограниченную двумя лучами, исходящими из одной точки. Лучи называют сторонами угла, а общее начало лучей – вершиной угла.

25) Угол можно обозначить:

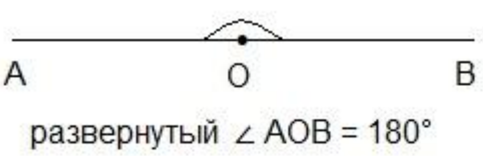
- одной буквой, являющейся его вершиной;
- двумя маленькими латинскими буквами;
- тремя буквами, при этом буква, обозначающая вершину, записывается между двумя другими буквами;
- цифрой;
- греческой буквой.



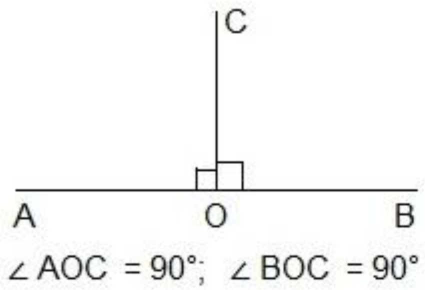
26) Два угла называются равными, если при наложении друг на друга их вершины и соответствующие стороны совпадут.

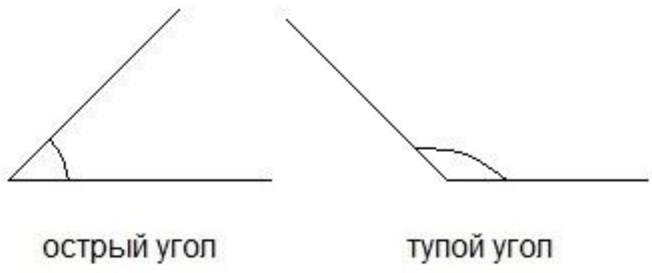
27) Для измерения градусной меры углов используется транспортир.

28) Если градусные меры двух углов равны, то эти углы будут равны.



29) Развернутым углом называют угол, стороны которого являются дополнительными лучами. Градусная мера развернутого угла равна 180°.





30) Прямым углом называют половину развернутого угла. Градусная мера прямого угла равна 90°.

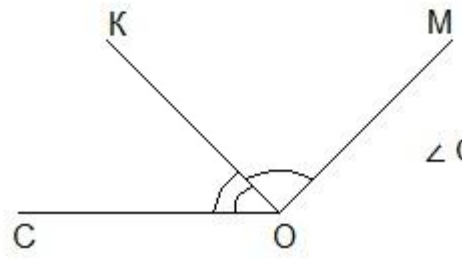
31) Острым углом называют угол, меньший прямого угла.

32) Тупым углом называют угол, больший прямого угла, но меньший развернутого угла.

Аксиомы измерения углов (33а, 33б).

33а) Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля.

33б) Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.



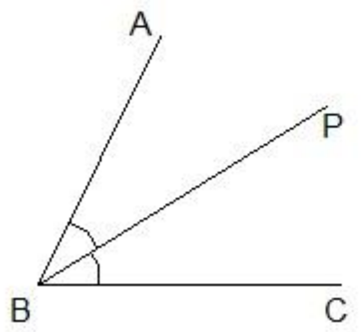
$\angle COM = \angle COK + \angle KOM$

<u>Аксиомы откладывания отрезков и углов (34а, 34б)</u>.

34а) На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

34б) От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

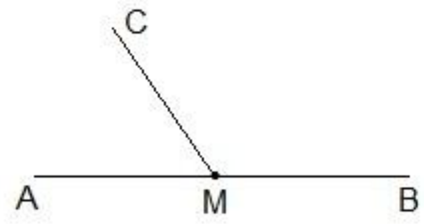
35) Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам.



BP - биссектриса угла ABC

$\angle ABP = \angle PBC$

36) Смежными углами называют углы, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

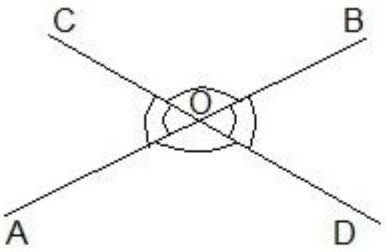


$\angle AMC$ и $\angle BMC$ - смежные;

$\angle AMC + \angle BMC = 180°$

37) <u>Теорема о смежных углах</u>. Сумма смежных углов равна 180°.

38) Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого угла.

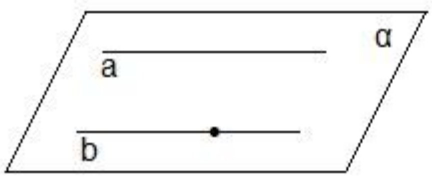


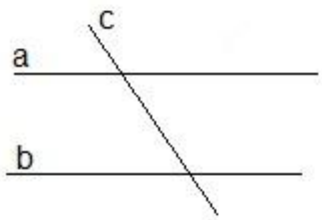
$\angle BOC$ и $\angle AOD$ - вертикальные; $\angle BOC = \angle AOD$.

$\angle AOC$ и $\angle BOD$ - вертикальные; $\angle AOC = \angle BOD$.

39) Теорема о вертикальных углах. Вертикальные углы равны.

40) Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Запись a || b читается «прямая **a** параллельна прямой **b**».



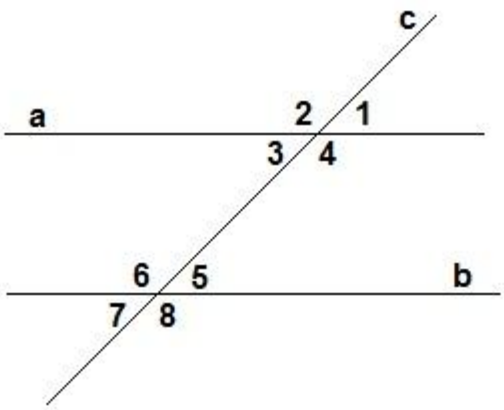


41) Аксиома параллельности.

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

42) Если какая-либо прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую.

43) При пересечении прямых **a** и **b** прямой **c** (**c** – секущая) образуется 8 углов, которые рассматривают парами:



$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ - внутренние накрест лежащие;

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ - внешние накрест лежащие;

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$ - соответственные;

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ - внутренние односторонние;

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ - внешние односторонние.

Признаки параллельности прямых (44-47).

44) Если какая-либо прямая параллельна одной из двух параллельных прямых, то все три прямые взаимно параллельны.

45) Если внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми и секущей, равны, то эти две прямые параллельны.

46) Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то данные две прямые параллельны.

47) Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то данные две прямые параллельны.

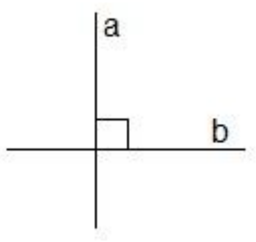
<u>Свойства параллельных прямых (48-50а)</u>.

48) Если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны.

49) Если две параллельные прямые пересечены третьей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

50) Если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные углы равны.

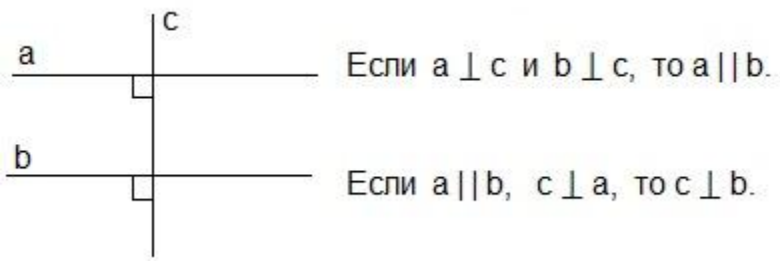
50а) *Следствие*. Два угла, образованные соответственно параллельными сторонами, равны.



51) Перпендикулярными прямыми называют две прямые, пересекающиеся под прямым углом. Записывают: a ⊥ b. Читают: «прямая **a** перпендикулярна прямой **b**».

52) Отрезки и лучи, лежащие на перпендикулярных прямых, также будут перпендикулярны.

53) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, будут параллельны между собой.

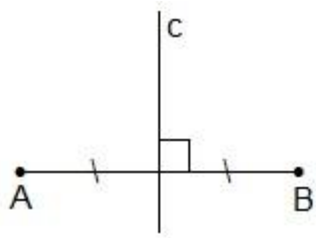


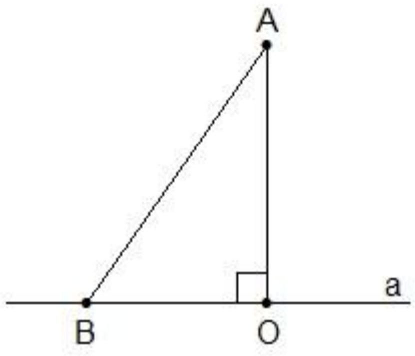
54) Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко второй прямой.

55) Через любую точку прямой можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную к данной.

56) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную к данной, причем только одну.

57) Серединным перпендикуляром к отрезку называют прямую, перпендикулярную к данному отрезку и проходящую через середину этого отрезка. Прямая **с** – серединный перпендикуляр к отрезку АВ.



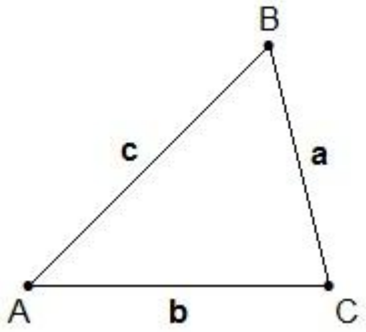


58) Наклонная и её проекция. Отрезок АО – перпендикуляр к прямой **а**, отрезок АВ – наклонная к прямой **а**. Точка О называется основанием перпендикуляра, точка В называется основанием наклонной. Отрезок ОВ (*расстояние между основаниями перпендикуляра и наклонной*) – проекция наклонной АВ на прямую **а**. Длина отрезка АО называется расстоянием от точки А до прямой **а**.

59) Перпендикуляр, опущенный из точки к данной прямой, меньше наклонной, проведенной из этой же точки.

60) Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой на другую.

61) Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками.

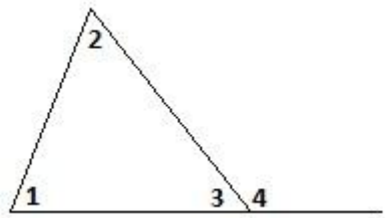


61а) Пишут: ∆ АВС. Читают: «треугольник АВС». Углы треугольника при его вершинах обозначают ∠А (или ∠В**А**С), ∠В (или ∠А**В**С), ∠С (или ∠А**С**В) и называют внутренними углами треугольника. Стороны треугольника, лежащие против вершин А, В и С, соответственно обозначаются буквами **а**, **b** и **с**, т.е. ВС = а, АС = b, АВ = с.

62) Периметром треугольника называется сумма всех его сторон. Р = а+b+с, где **Р** – периметр, **а**, **b** и **с** – стороны треугольника.

63) В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

64) В любом треугольнике против большего угла лежит большая сторона.



65) Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

66) Любая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

67) Разносторонним треугольником называют треугольник, у которого стороны имеют разные длины.

68) Сумма внутренних углов любого треугольника составляет 180°, т. е. ∠1+∠2+∠3=180°.

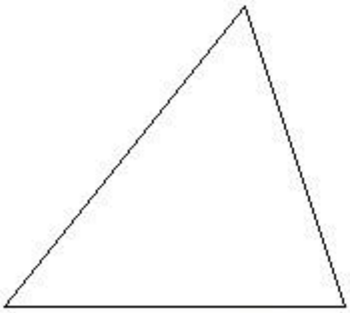
69) Внешним углом треугольника называют угол, смежный с его внутренним углом. Внешний угол треугольника (∠4) равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, т. е. ∠4=∠1+∠2.

70) Внешний угол треугольника больше любого из внутренних углов, не смежных с ним.

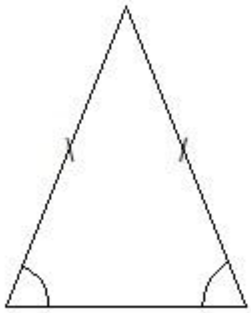
71) Равносторонним называют треугольник, имеющий равные стороны.

72) Равнобедренным треугольником называют треугольник, у которого длины двух сторон равны. Эти равные стороны называют *боковыми сторонами*, а третью сторону называют *основанием* равнобедренного треугольника.

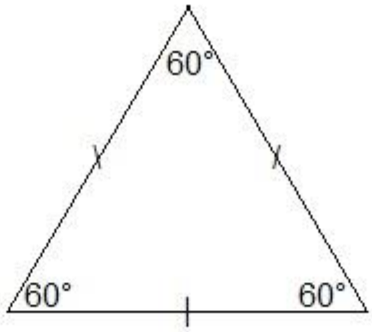
73) Остроугольным называют треугольник, у которого все углы острые.



остроугольный треугольник



равнобедренный остроугольный треугольник



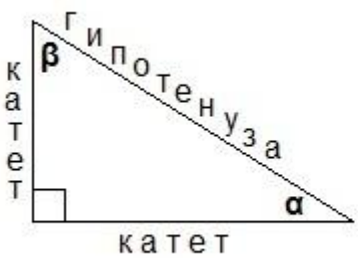
равносторонний треугольник

74) Прямоугольным называют треугольник, у которого один угол прямой (равен 90°). Стороны прямоугольного треугольника имеют особые названия: катеты (*стороны, образующие прямой угол*), и гипотенуза (*сторона, лежащая против прямого угла*).

75) Каждый катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы.

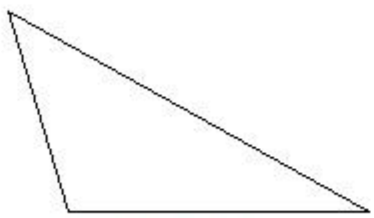
76) У треугольника не может быть больше одного прямого угла.

77) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

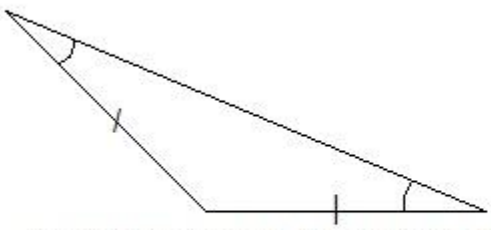


$\alpha + \beta = 90°$

равнобедренный прямоугольный треугольник



тупоугольный треугольник

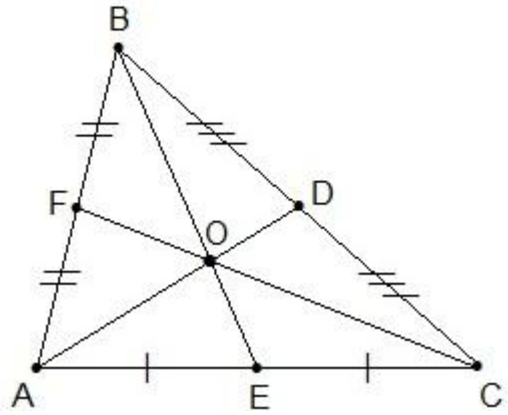


равнобедренный тупоугольный треугольник

78) Тупоугольным называют треугольник, у которого один угол тупой.

79) У треугольника не может быть больше одного тупого угла.

80) Если два угла одного треугольника равны соответствующим двум углам другого треугольника, то равны и их третьи углы.

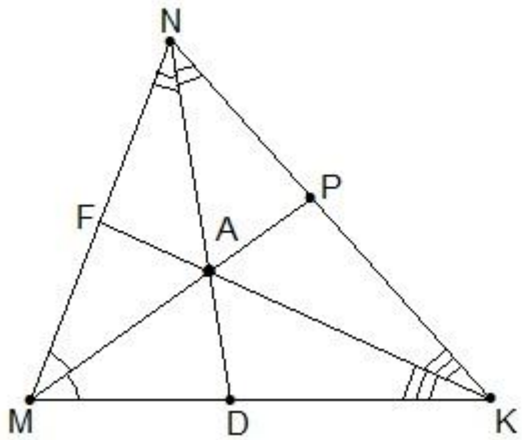


81) Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

82) Все три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника. *В треугольнике ABC медианы AD, BE и CF пересекаются в точке O.*

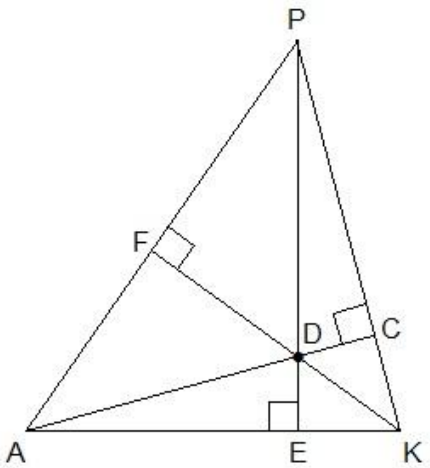
83) Биссектрисой треугольника называют отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне.

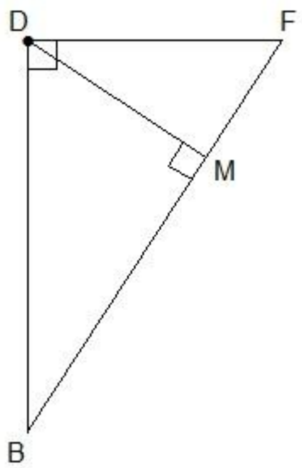
84) Все три биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника. *В треугольнике MNK биссектрисы MP, ND и KF пересекаются в точке A.*

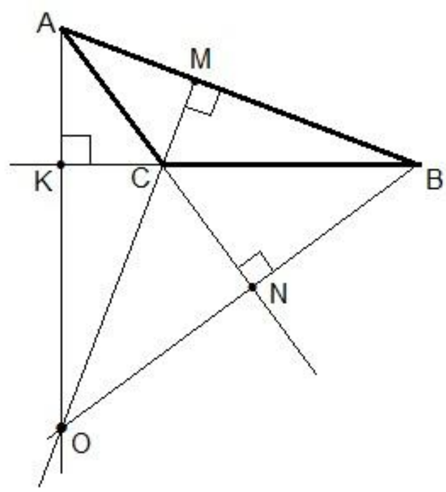


85) Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, проведенного из данной вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

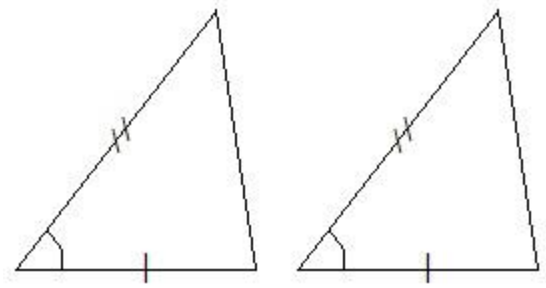
86) Все три высоты треугольника пересекаются в одной точке. *Эта точка лежит внутри треугольника, если этот треугольник – остроугольный; является вершиной прямого угла в случае прямоугольного треугольника и находится вне треугольника, если этот треугольник является тупоугольным.*





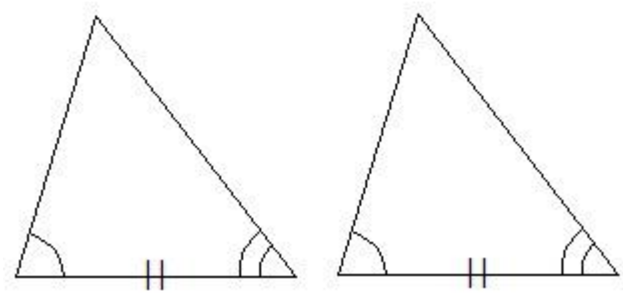


87) Равными треугольниками называются треугольники, у которых все соответственные стороны равны и все соответственные углы равны.



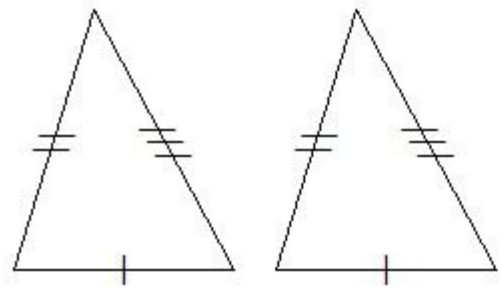
88) 1-й признак равенства треугольников.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответствующим двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



89) 2-й признак равенства треугольников.

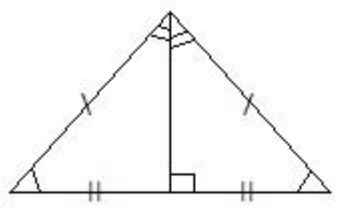
Если одна сторона и прилежащие к ней два угла одного треугольника равны соответствующей стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



90) 3-й признак равенства треугольников.

Если три стороны одного треугольника равны трём соответственным сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Свойства равнобедренного треугольника.



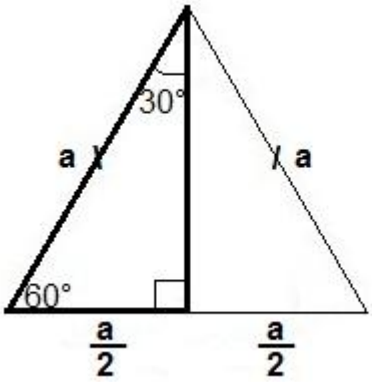
91) Теорема. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

92) Теорема (обратная). Если два угла треугольника равны, то он является равнобедренным треугольником

93) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

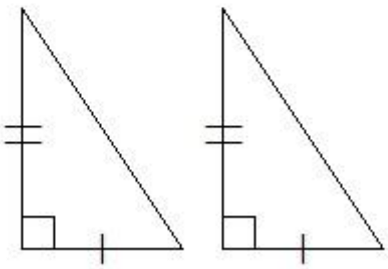
94) В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

95) В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является высотой и медианой.

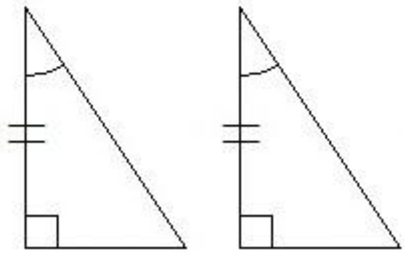


96) В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

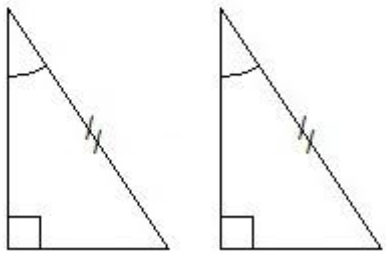
Признаки равенства прямоугольных треугольников.



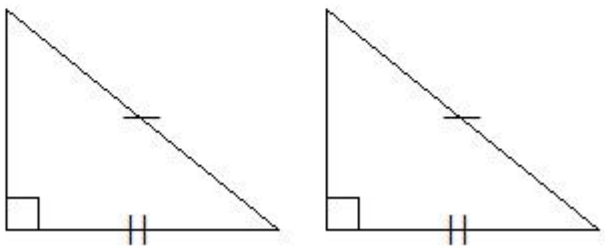
97) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



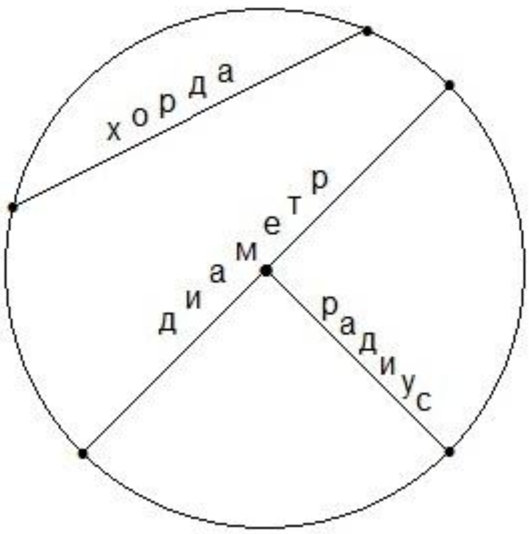
98) Если один катет и прилежащий к нему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны одному катету и прилежащему к нему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



99) Если гипотенуза и один острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и одному острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



100) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

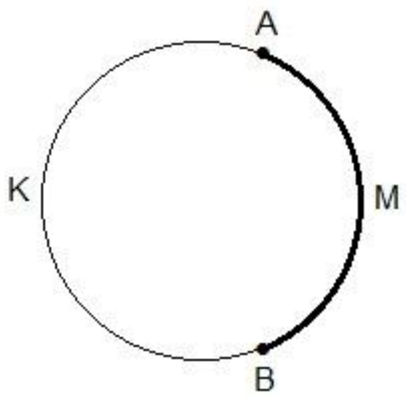


101) Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

102) Радиусом окружности (обозначают R или r) называется отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

103) Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две любые точки окружности.

104) Диаметром окружности (обозначают D или d) называется хорда, проходящая через центр окружности. (*D=2R или d=2r*).



105) Дугой называют часть окружности, ограниченной двумя точками этой окружности.

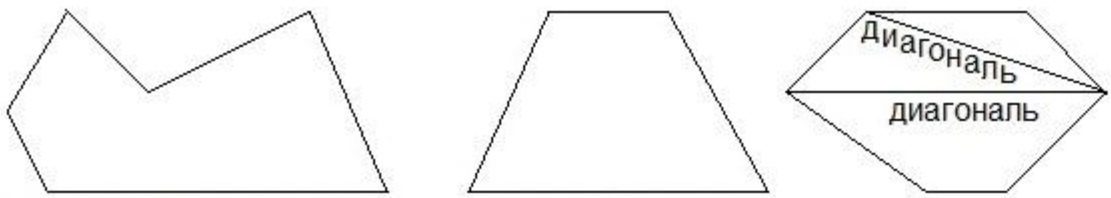
Дугу обозначают двумя точками – началом и концом дуги. Пишут: «◡AB», читают: «дуга AB». На рисунке есть меньшая дуга AB (она выделена) и большая дуга AB. Чтобы было понятно, о какой дуге идет речь, дугу обозначают тремя буквами: дуга AMB и дуга AKB (◡AMB и ◡AKB).

8 класс.

106) Многоугольником называют плоскую фигуру, образованную замкнутым рядом прямолинейных отрезков (*замкнутой ломаной линией*).

107) Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей любую его сторону.

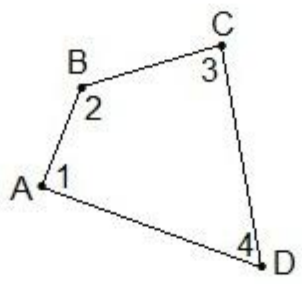
108) Диагональю многоугольника называют отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника.



невыпуклый многоугольник выпуклый многоугольник

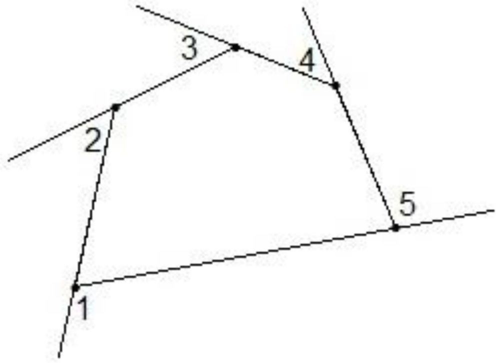
109) Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

110) Сумма внутренних углов многоугольника равна 180°·(n-2), где n – число сторон (углов) многоугольника.



111) Четырёхугольник – это многоугольник, имеющий 4 вершины. Стороны четырёхугольника, не имеющие общих вершин, называются противоположными сторонами. (*AB и CD; AD и BC*). Две несоседние вершины называются противоположными вершинами (*A и C; B и D*).

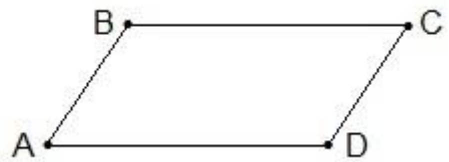
112) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360° (*∠1+∠2+∠3+∠4=360°*).



113) Внешним углом многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом.

114) Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Сумма внешних углов пятиугольника на рисунке: ∠1+∠2+∠3+∠4+∠5=360°.

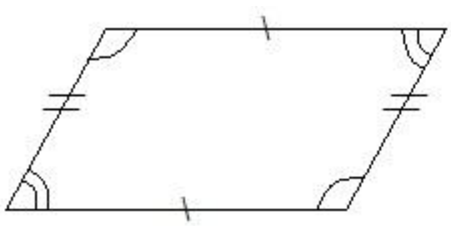


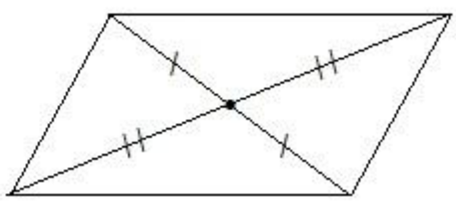
115) Параллелограмм – это четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (*AB* || *CD; AD* || *BC*).

<u>Свойства параллелограмма (</u>116а-116в).

116а) У параллелограмма противоположные стороны равны.

116б) У параллелограмма противолежащие углы равны. *Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°.*





116в) Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

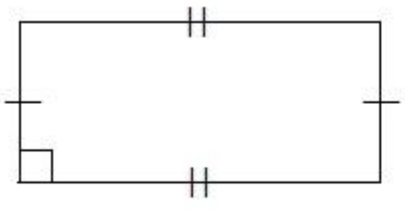
<u>Признаки параллелограмма (</u>117а-117в).

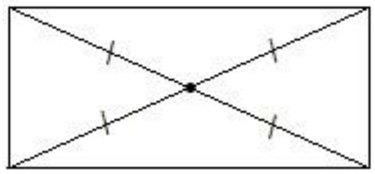
117а) Если у четырёхугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

117б) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырёхугольник является параллелограммом.

117в) Если диагонали четырёхугольника в точке пересечения делятся пополам, то такой четырёхугольник является параллелограммом.

118) Прямоугольник – это параллелограмм, в котором имеется прямой угол.



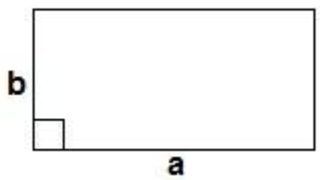


119) Прямоугольник – это четырёхугольник, в котором все углы прямые.

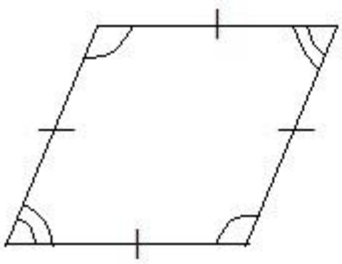
120) Противолежащие стороны прямоугольника равны.

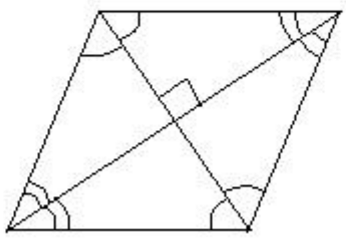
121) Диагонали прямоугольника равны.

122) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.



123) Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме его смежных сторон: P = 2·(a+b).





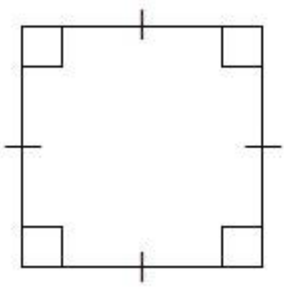
124) Ромб – это параллелограмм, все стороны которого равны между собой.

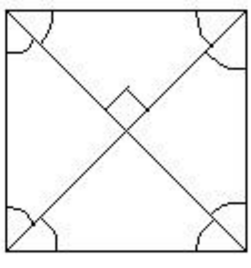
125) Противолежащие углы ромба равны между собой.

126) Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

127) Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

128) Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.





129) Квадрат – это прямоугольник, все стороны которого равны.

130) У квадрата все углы прямые.

131) У квадрата все стороны равны.

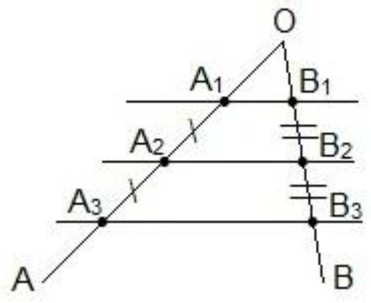
132) Диагонали квадрата равны.

133) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

134) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.

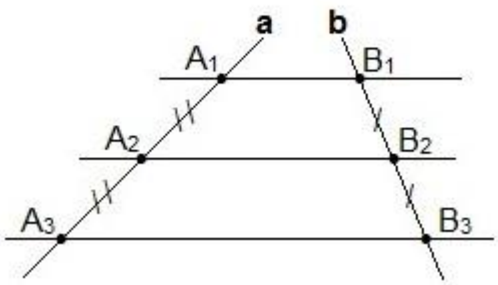
135) Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

136) Периметр квадрата вычисляют по формуле: P = 4a, где a – сторона квадрата.



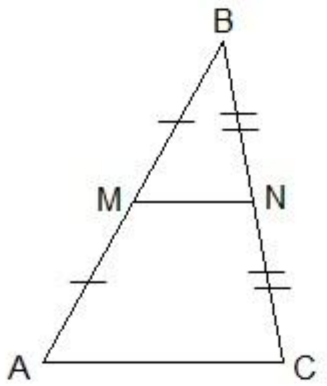
137) Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекают стороны угла AOB так, что $A_1A_2=A_2A_3$. Тогда на основании теоремы Фалеса $B_1B_2=B_2B_3$.



137а) Теорема Фалеса. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

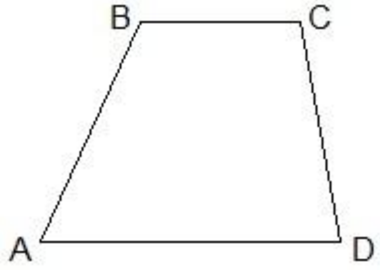
*Параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекают две данные прямые **a** и **b** так, что $A_1A_2=A_2A_3$. Тогда на основании теоремы Фалеса $B_1B_2=B_2B_3$.*



138) Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

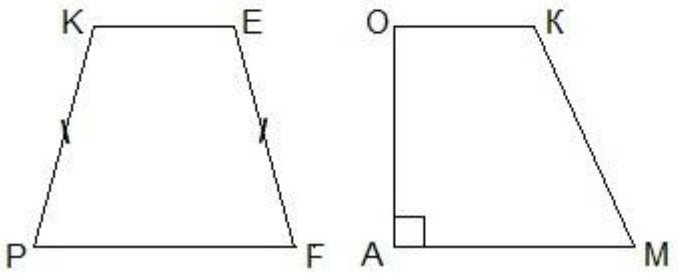
MN – средняя линия треугольника ABC.

139) Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине. $MN \parallel AC$; $MN = \frac{1}{2} AC$.



140) Трапецией называют четырёхугольник, две стороны которого параллельны между собой, а две нет. Две параллельные стороны называют основаниями трапеции, а две другие стороны называют боковыми сторонами трапеции.

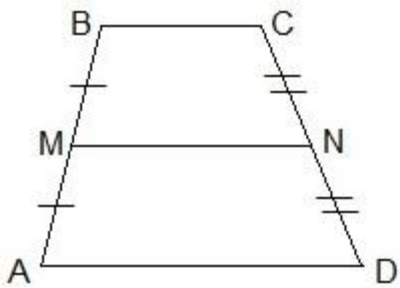
ABCD – трапеция, AD и BC – основания (AD ||BC), AB и CD – боковые стороны трапеции.



141) Трапецию называют равнобокой или равнобедренной, если её боковые стороны равны между собой. *Трапеция PKEF является равнобокой, так как её боковые стороны PK и EF равны.*

142) Прямоугольной называют трапецию, имеющую прямой угол. *Трапеция AOKM – прямоугольная, так как угол A – прямой. Угол O также будет прямым.*

143) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. *В трапеции ABCD отрезок MN - средняя линия.*

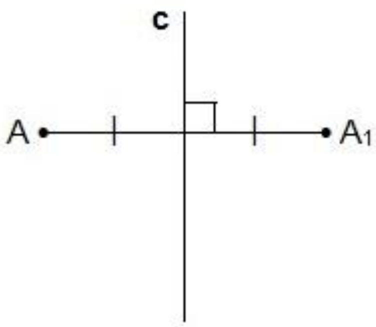


144) <u>Теорема о средней линии трапеции.</u> Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

В трапеции ABCD средняя линия MN || AD, MN || BC;

$$MN = \frac{AD+BC}{2}.$$

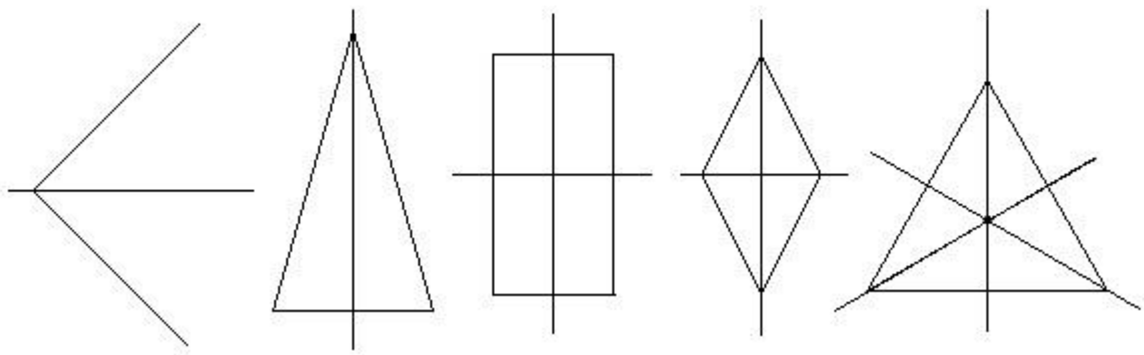
145) У равнобокой трапеции углы при основании равны.

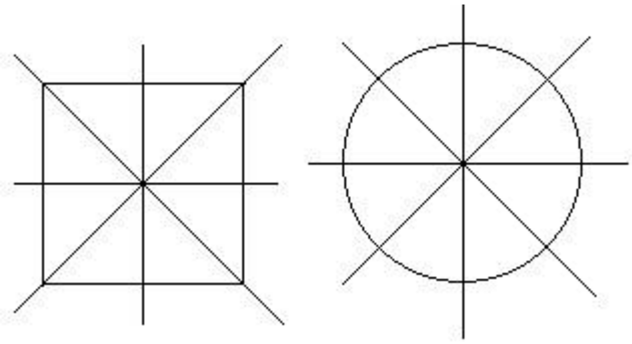


146) Если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция является равнобокой.

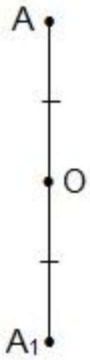
147) Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой **c**, если прямая **c** перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину. Прямую **c** называют осью симметрии для точек A и A_1.

148) Фигура называется симметричной относительно прямой **c**, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой **c** также принадлежит этой фигуре. Прямая **c** будет служить осью симметрии данной фигуры. Говорят, что фигура обладает осевой симметрией.





Угол и равнобедренный треугольник имеют по одной оси симметрии; прямоугольник и ромб - по две; равносторонний треугольник – три; квадрат – четыре, а окружность (круг) – бесконечное множество осей симметрии. У параллелограмма нет осей симметрии.

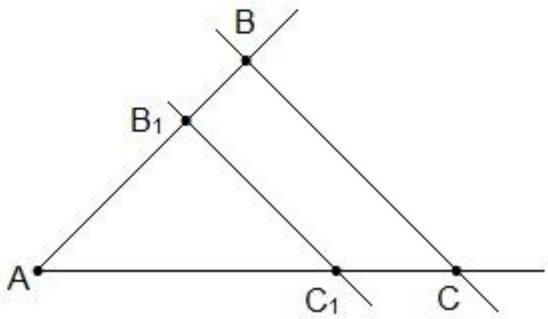


149) Две точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O, если O – середина отрезка AA_1. Точка O называется центром симметрии и считается симметричной самой себе.

150) Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

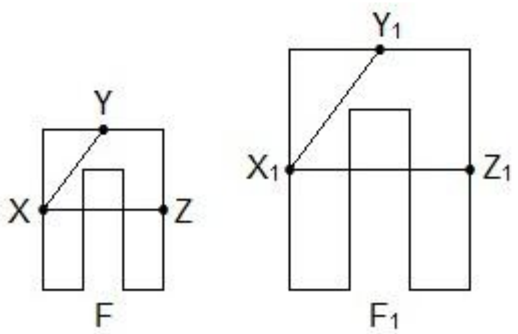
Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются: окружность и круг (центр симметрии – центр окружности, круга); а также параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат (центр симметрии – точка пересечения диагоналей). Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, служит треугольник.

151) Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



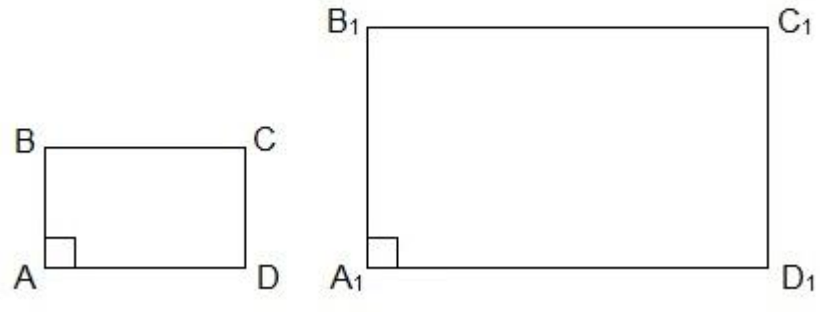
Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и B_1C_1.

Тогда $\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}$. Также верно: $\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{B_1B}$.



152) Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между соответственными точками двух фигур изменяются в одно и то же число раз. Это число обозначают буквой **k** и называют коэффициентом подобия.
На рисунке $X_1Y_1 = \boldsymbol{k} \cdot XY$; $X_1Z_1 = \boldsymbol{k} \cdot XZ$. Также можно было записать: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{X_1Z_1}{XZ} = k$.

153) Две фигуры называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: **∾**. *Так как преобразование фигуры F в фигуру F_1 является преобразованием подобия, то можно записать: F ∾ F_1.Читают: фигура F подобна фигуре F_1.*

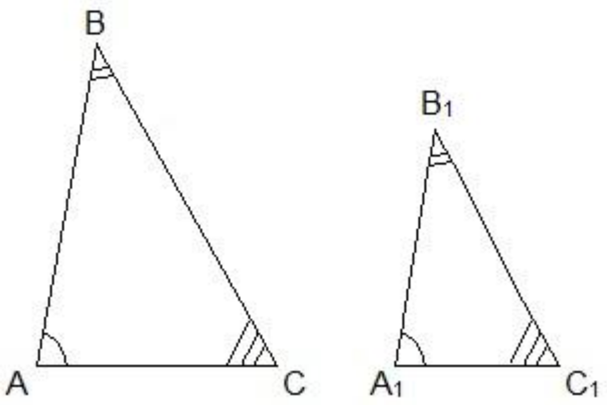


Пример. Пусть даны два прямоугольника: прямоугольник ABCD и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$.

Точки A и B переходят в соответственные им точки A_1 и B_1, а точка D переходит в соответственную ей точку D_1, причём, A_1B_1 = **k** **·** AB и A_1D_1 = **k** **·** AD.

Тогда по определению 152) мы имеем преобразование подобия и можем утверждать, что прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен прямоугольнику ABCD с коэффициентом подобия **k**.

154) У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.



155) У подобных треугольников соответствующие углы равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника. *Пишут:* Δ *ABC* ∾ Δ *$A_1B_1C_1$. Читают: треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.* Это значит, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ = **k**, где **k** – коэффициент подобия и равен отношению соответственных сторон этих треугольников.

Признаки подобия треугольников (156 – 158).

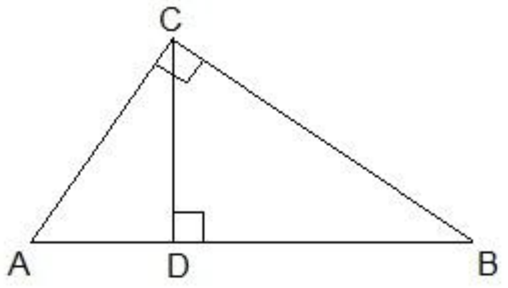
156) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

156а) Для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по равному острому углу.

157) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

158) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике (159, 160).

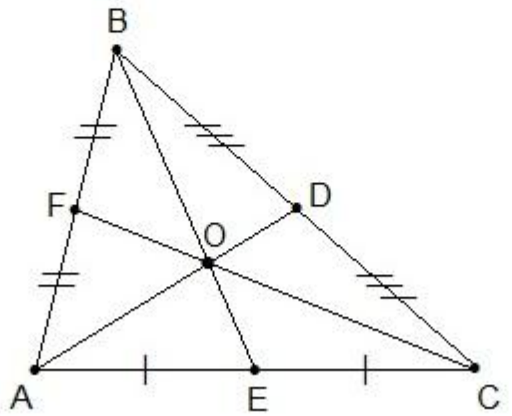


В треугольнике ABC угол C – прямой, AC и BC – катеты, AB – гипотенуза. CD – высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе;
AD – проекция катета AC на гипотенузу AB;
BD – проекция катета BC на гипотенузу AB.

159) Высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе есть средняя пропорциональная величина между проекциями катетов на гипотенузу: $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ или $CD^2 = AD \cdot BD$;

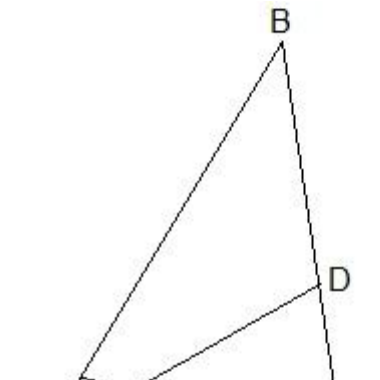
160) Каждый катет есть средняя пропорциональная величина между всей гипотенузой и проекцией данного катета на гипотенузу: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ или $AC^2 = AB \cdot AD$.

Аналогично, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ или $BC^2 = AB \cdot BD$. Примечание. Утверждения 159) и 160) следуют из подобия прямоугольных треугольников ABC, ADC и BDC.



161) Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 **:** 1, считая от вершины.

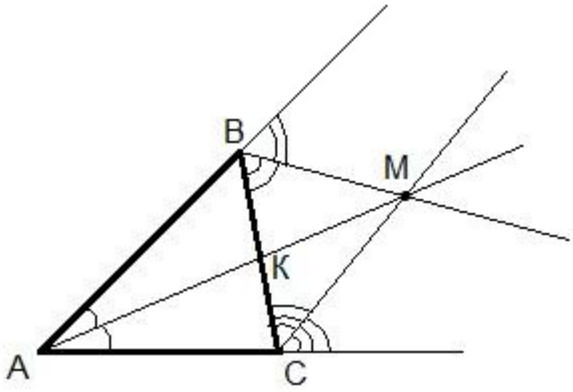
В треугольнике ABC медианы AD, BE и CF пересекаются в точке O, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины, т.е. $\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}$.



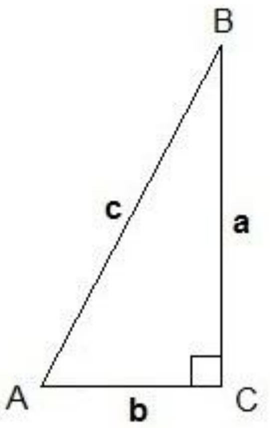
162) Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника.
В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, которая разделила сторону BC на отрезки BD и CD. Справедливо равенство: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ *или* $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

163*) Если обозначить биссектрису AD = β_a; стороны треугольника: BC = a, AC = b, AB = c, то длина биссектрисы: $\beta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, где p - полупериметр; $p = \frac{a+b+c}{2}$.

164*) Биссектриса одного угла треугольника пересекается в одной точке с биссектрисами внешних углов при двух других вершинах треугольника.



Биссектриса АК пересекается в точке М с биссектрисами внешних углов треугольника АВС при вершинах В и С.



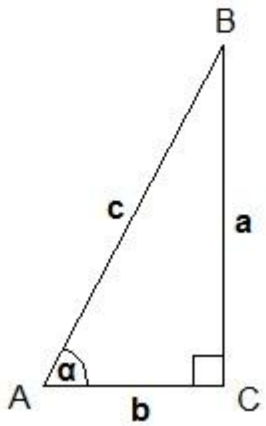
165) Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $BC^2 + AC^2 = AB^2$ или $a^2 + b^2 = c^2$.

166) Наиболее часто используемые Пифагоровы «тройки» (*катет; катет; гипотенуза*):

(3; 4; 5 – *египетский треугольник*), (5; 12; 13), (8; 15; 17), (7; 24; 25), (20; 21; 29), (12; 35; 37), (9; 40; 41).

167) Синусом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Синус угла α обозначается так: sinα.

В ΔABC $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$ или $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\left(\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}\right)$.



168) Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на синус α: $BC = AB \cdot \sin\alpha$ или $a = c \cdot \sin\alpha$.

169) Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: cosα.

В ΔABC $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$ или $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\left(\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}\right)$.

170) Катет, прилежащий к углу α равен произведению гипотенузы на косинус α: $AC = AB \cdot \cos\alpha$ или $b = c \cdot \cos\alpha$

171) Тангенсом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету. Тангенс угла α обозначается так: tgα.

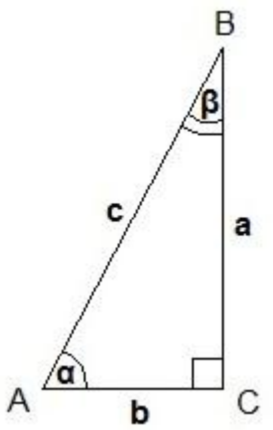
В ΔABC $\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$ или $\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\left(\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}\right)$.

172) Катет, противолежащий углу α, равен произведению другого катета на тангенс угла α: $BC = AC \cdot \text{tg}\alpha$ или $a = b \cdot \text{tg}\alpha$.

173) Котангенсом острого угла α прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету. Котангенс угла α обозначается так: ctgα.

В ΔABC $\text{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$ или $\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}\right)$.

174) Катет, прилежащий к углу α, равен произведению другого катета на котангенс угла α: AC = BC · ctgα или b = a · ctgα.



175) В прямоугольном треугольнике ABC катеты BC=**a** и AC=**b**, гипотенуза AB=**c**, ∠A=**α**, ∠B=**β**. Сумма острых углов α+β=90°.
По определению синуса, косинуса, тангенса и котангенса имеем:
1) $\sin\beta = \frac{b}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; **2)** $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; **3)** $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$;
4) $\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Получаем: 1) sinβ = cosα; 2) cosβ = sinα; 3) tgβ = ctgα; 4) ctgβ = tgα.
Так как β = 90°- α, то справедливы равенства 176-179.

176) sin(90°- α) = cosα; **177)** cos(90°- α) = sinα;

178) tg(90°- α) = ctgα; **179)** ctg(90°- α) = tgα

180) Если острый угол **α** возрастает, то sinα и tgα возрастают, а cosα и ctgα убывают.

181*) Если x – переменная, то величины sinx, cosx, tgx и ctgx являются функциями. Эти функции называются *тригонометрическими функциями*. Функции sinx и cosx называют кофункциями. Функции tgx и ctgx также являются кофункциями.

182*) Кофункции углов, дополняющих друг друга до 90° равны (тождества 176-179).
Примеры: 1) sin32°= cos58°; 2) ctg71°= tg19°.

<u>Основные тригонометрические тождества</u> (183-188).

183) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **184)** $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **185)** $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

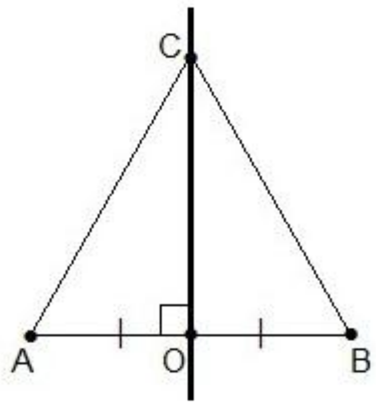
186) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$; **187)** $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; **188)** $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

189) Значения тригонометрических функций некоторых углов (таблица).

	30°	**45°**	**60°**
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

190) Фигуру, состоящую из точек, обладающих определённым свойством, называют геометрическим местом точек.

Пример: на плоскости геометрическим местом точек, равноудалённых от данной точки, будет окружность (см. 101-104).



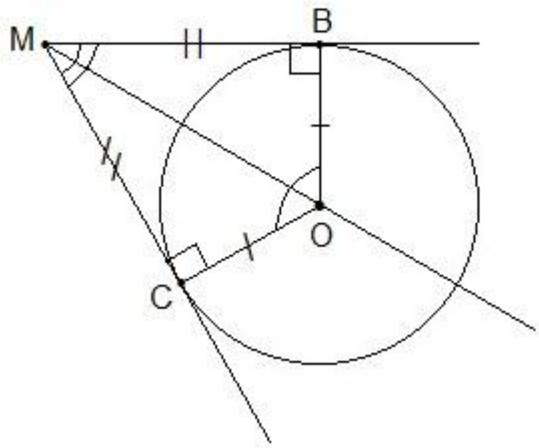
191) Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину (*на рисунке это прямая ОС – серединный перпендикуляр к отрезку АВ, см. 57*).

192) Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему. *ОС – серединный перпендикуляр к отрезку АВ. АС = ВС.*

193) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

194) Касательной к окружности называют прямую, которая имеет одну общую точку с окружностью. Общая точка касательной и окружности называется точкой касания.

195) Касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, проведённому в точку касания.

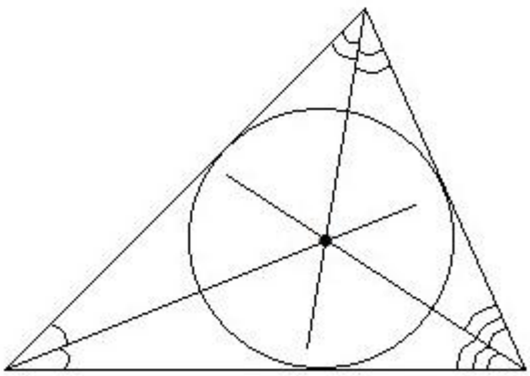


195а) Если из точки М, лежащей вне окружности с центром в точке О, провести две касательные МВ и МС, то:

1) центр окружности лежит на биссектрисе МО угла ВМС (О ∈ ОМ);

2) расстояния от вершины угла ВМС до точек касания равны (МВ = МС);
3) Отрезки, соединяющие точки касания с центром окружности, являются её радиусами и перпендикулярны к сторонам угла ВМС (ОВ = ОС = R, OB ⊥ MB, OC ⊥ MC);
4) ∠ВМС + ∠ВОС = 180°.

196) Прямая и окружность могут иметь две общие точки, одну общую точку и не иметь общих точек.



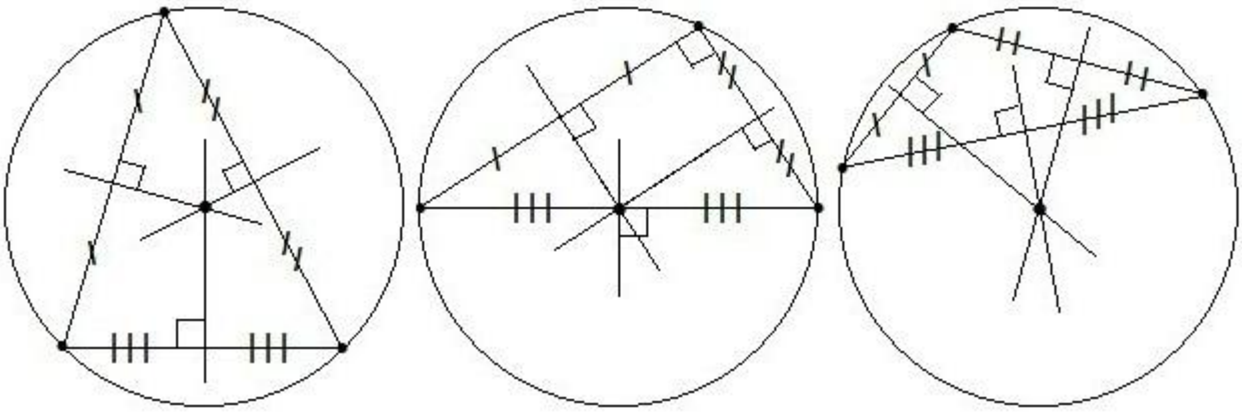
197) Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.
198) Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

199) Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.
200) Центр окружности, описанной около треугольника, есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

200а) Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (рисунок слева).

200б) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы (рисунок в центре).

200в) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника (рисунок справа).



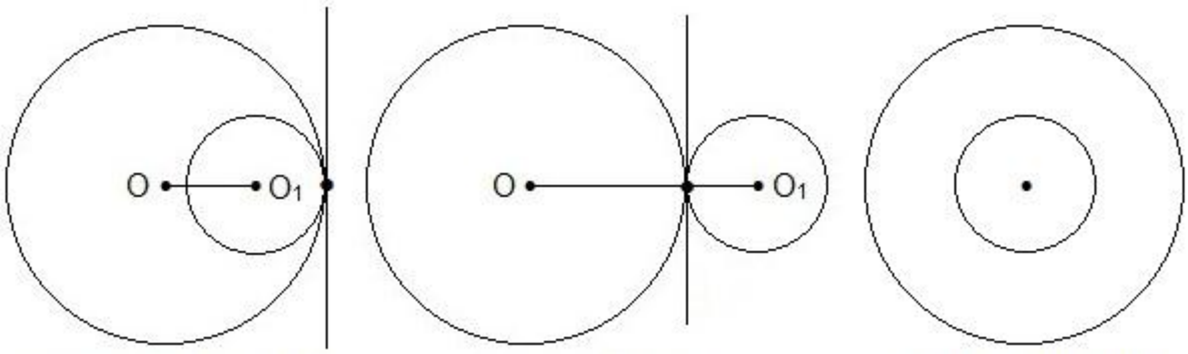
201) Если две окружности имеют общую касательную, то говорят, что эти окружности касаются друг друга.

202) Касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной.

203) Касание окружностей называется внешним, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной.

204) Концентрическими окружностями называют окружности, имеющие один центр.

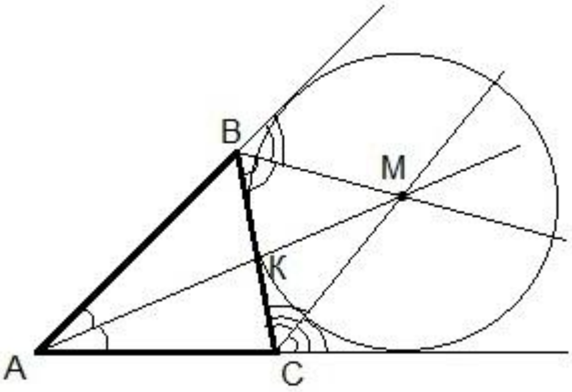
205) Круговым кольцом называют плоскость, заключённую между двумя окружностями с одним и тем же центром (*между концентрическими окружностями*)



внутреннее касание окружностей

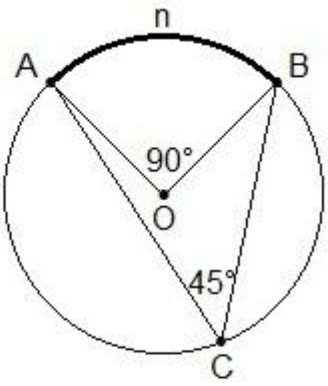
внешнее касание окружностей

концентрические окружности



206*) Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

207*) При каждой стороне любого треугольника можно построить единственную вневписанную окружность, центром которой является точка пересечения биссектрисы, проведённой из вершины, противолежащей этой стороне, и биссектрис внешних углов при двух других вершинах. *M – центр вневписанной окружности*.



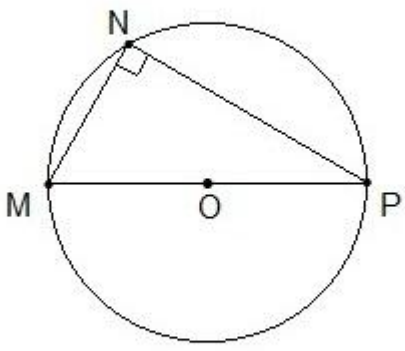
208) Угол, образованный двумя радиусами, называется центральным углом окружности. *∠AOB – центральный.*

209) Центральный угол измеряется величиной дуги, на которую он опирается. *⌣AnB=90° и центральный ∠AOB=90°.*

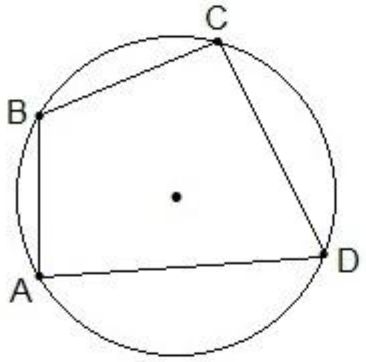
210) Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки, называется вписанным в окружность. *∠ACB – вписанный.*

211) Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. *Например, ⌣AnB=90°, а вписанный ∠ACB=45°.*

211a) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



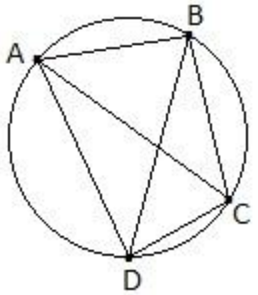
212) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°. *Вписанный угол MNP опирается на диаметр MP, который стягивает дугу в 180° (полуокружность), поэтому, ∠ MNP=90°.*



213) Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. *Четырёхугольник ABCD является вписанным в окружность.*

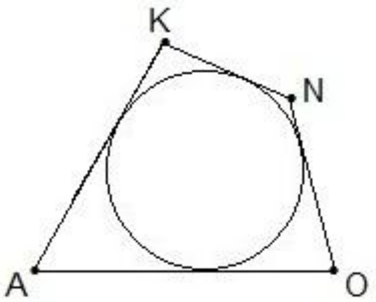
214) Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°. ($\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$).

215) Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.



216*) В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (<u>теорема Птолемея</u>).

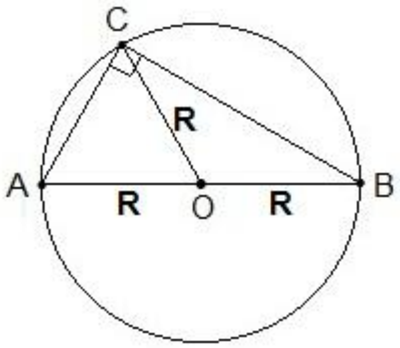
$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$



217) Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. *Четырёхугольник AKNO является описанным около окружности*.

218) В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. ($AO+KN=AK+ON$).

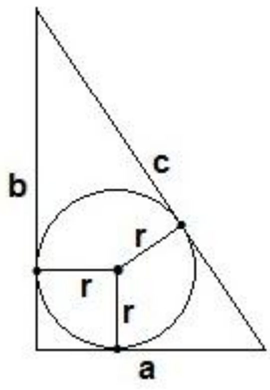
219) Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

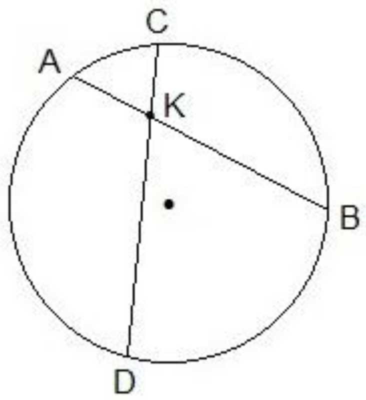


220) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. $R = \frac{1}{2}AB$.

221) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы (*равна радиусу описанной окружности*). $OC = R = \frac{1}{2}AB$.

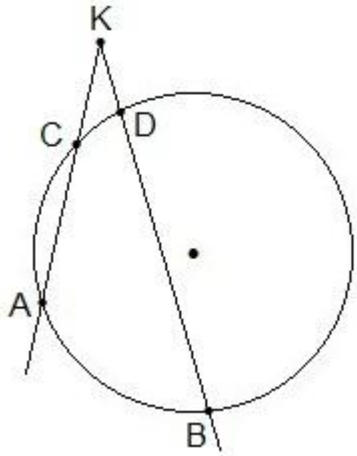
222) Если в прямоугольный треугольник с катетами **a** и **b** и гипотенузой **c** вписана окружность радиуса **r**, то радиус этой окружности находят из равенства: **2r = a + b - c.**





223) Если две хорды одной окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.
Хорды AB и CD пересекаются в точке К, поэтому AK · BK = CK · DK.

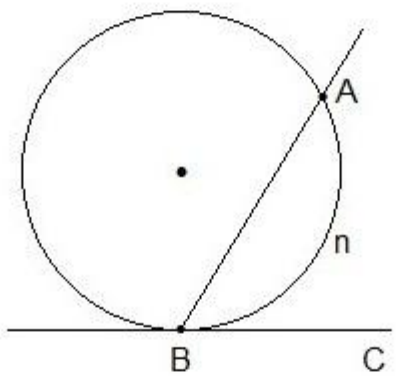
224) *На этом же рисунке*: ∠AKC = ∠BKD = $\frac{1}{2}$ (◡AC + ◡BD), где ◡AC и ◡BD – градусные меры дуг. Аналогично, ∠AKD = ∠BKC = $\frac{1}{2}$ (◡AD + ◡BC), где ◡AD и ◡BC – градусные меры дуг.

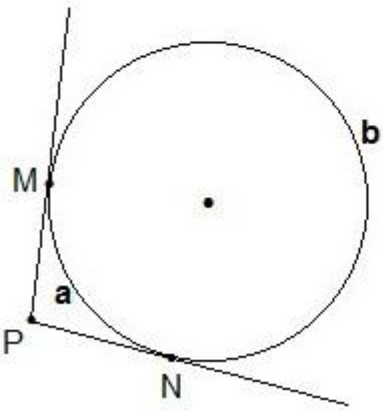


225) Угол между двумя секущими, проведёнными к окружности из одной точки.

Из точки К к окружности проведены две секущие КА и КВ. ∠AKB = $\frac{1}{2}$ (◡AB – ◡CD), где ◡AB и ◡CD - это градусные меры дуг.

226) Угол между хордой и касательной. *К окружности проведена касательная BC. AB – хорда.*
∠ABC = $\frac{1}{2}$ ◡AnB, где ◡AnB – градусная мера дуги.

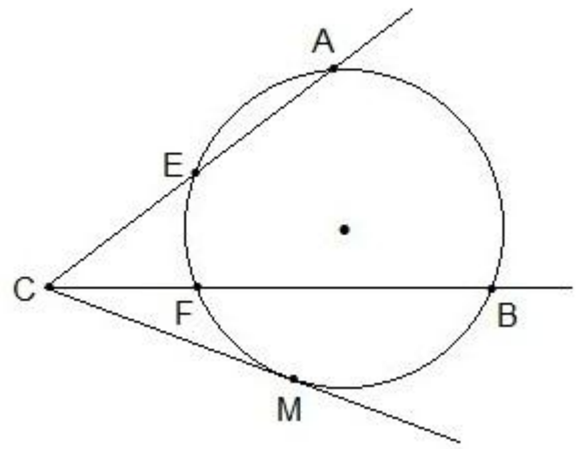




227) Угол между двумя касательными.

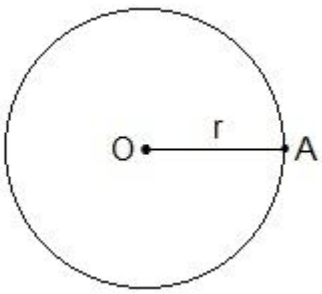
К окружности проведены касательные PM и PN.

∠MPN = $\frac{1}{2}$ (◡MbN – ◡MaN), где ◡MbN и ◡MaN - это градусные меры дуг.

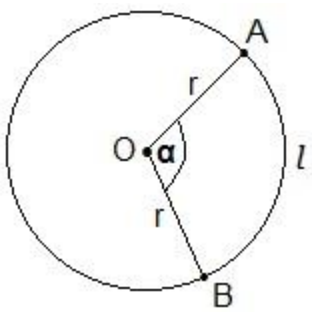


228) Произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной. *Из точки С к окружности проведены секущие СА и СВ и касательная СМ.*

АС ∙ СЕ = $СМ^2$. Точно так же СВ ∙ CF = $СМ^2$. Отсюда АС ∙ СЕ = СВ ∙ CF. *Если из одной точки, лежащей вне окружности, проведены секущие к окружности, то число, равное произведению любой секущей на её внешнюю часть будет неизменным.*



229) Длина окружности:
С = 2πr,
где r – радиус окружности,
π ≈ 3,14.
π - отношение длины окружности к её диаметру *одно и то же для любых окружностей.*



230) Длина дуги АВ:

$l = \frac{\pi r}{180°} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, где
r – радиус окружности,
α – градусная мера угла, стягиваемого данной дугой;
π ≈ 3,14.

Площади фигур.

231) Площадь многоугольника – это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

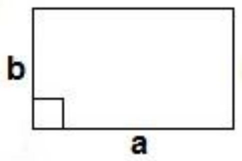
232) За единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 мм, 1 см, 1 м, 1 единичный отрезок и т.д.

233) Равные многоугольники имеют равные площади.

234) Неравные многоугольники, имеющие одинаковые площади, называют равновеликими.

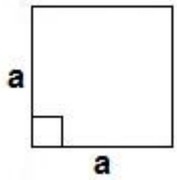
235) Площадь многоугольника можно найти как сумму площадей фигур, на которые можно разбить этот многоугольник.

236) <u>Площадь прямоугольника</u> равна произведению его длины на ширину:



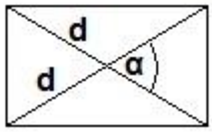
$S = a \cdot b$.

237) <u>Площадь квадрата</u> равна квадрату его стороны:



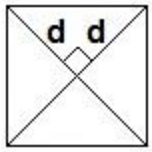
$S=a^2$.

238) <u>Площадь прямоугольника</u> равна половине квадрата его диагонали, умноженной на синус угла между диагоналями:



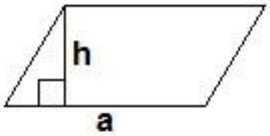
$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\alpha$.

239) <u>Площадь квадрата</u> равна половине квадрата его диагонали:



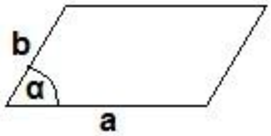
$S = \frac{1}{2} d^2$.

240) <u>Площадь параллелограмма</u> равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне:

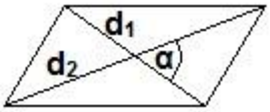


$S=a \cdot h$.

241) <u>Площадь параллелограмма</u> равна произведению двух его сторон на синус угла между ними:



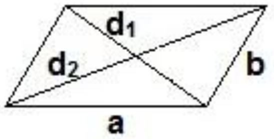
$S=ab \cdot \sin\alpha$.

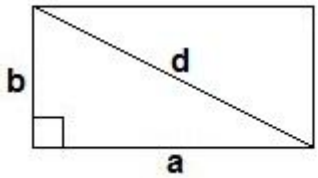


242) <u>Площадь параллелограмма</u> равна половине произведения его диагоналей на синус угла между диагоналями:

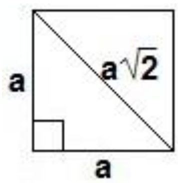
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.

243) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



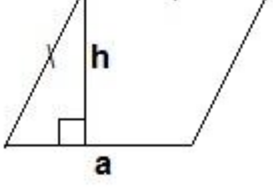


244) Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его смежных сторон: $d^2 = a^2 + b^2$.



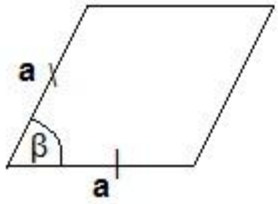
245) Диагональ квадрата со стороной **a** равна $\mathbf{a\sqrt{2}}$.

246) <u>Площадь ромба</u> равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне:



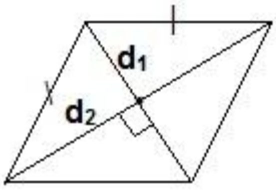
$S=a \cdot h$.

247) <u>Площадь ромба</u> равна произведению квадрата его стороны на синус угла:

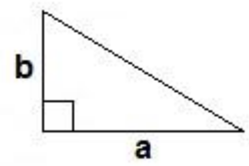


$S=a^2 \cdot \sin\beta$.

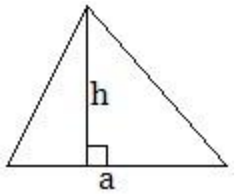
248) <u>Площадь ромба</u> равна половине произведения его диагоналей:



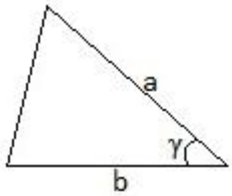
$S= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.



249) <u>Площадь прямоугольного треугольника</u> равна половине произведения его катетов: $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot b$.

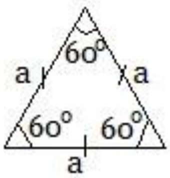


250) <u>Площадь любого треугольника</u> равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне: $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h$



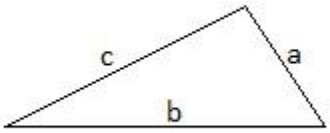
251) <u>Площадь любого треугольника</u> равна половине произведения двух его сторон на синус угла между этими сторонами:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma$$



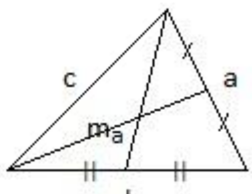
252) Площадь равностороннего треугольника со стороной **a** находят по формуле:

$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



253) Если известны все три стороны треугольника, то его площадь можно найти по <u>формуле Герона:</u>

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

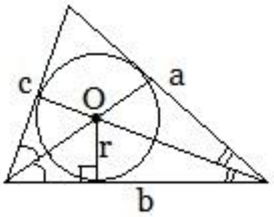


254) Центр тяжести треугольника - точка пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2 **:** 1, считая от вершины.

255) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ - длина медианы, проведенной к стороне а.

256) Медиана делит треугольник на два **равновеликих треугольника**, площадь каждого из этих двух треугольников равна половине площади данного треугольника.

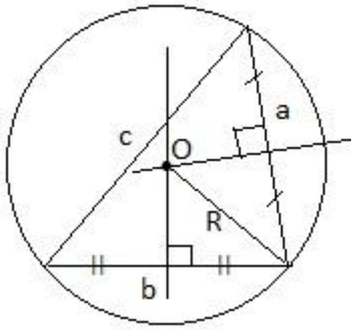
257) Площадь треугольника равна половине произведения его периметра **P** на радиус вписанной окружности **r** (*центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис углов треугольника*).



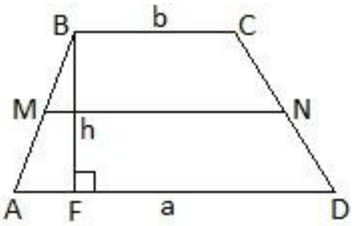
$S_\Delta = \frac{1}{2}P \cdot r$, где $P = a+b+c$.

257а) Радиус вписанной в треугольник окружности: $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

258) Радиус R - описанной около треугольника окружности (*центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника*) находят по формуле:



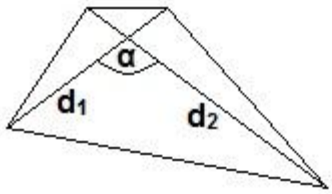
$R = \frac{abc}{4S}$, где a, b и c - стороны треугольника, S – площадь треугольника.



259) <u>Площадь трапеции</u> равна произведению полусуммы её оснований на высоту трапеции или *площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту*:

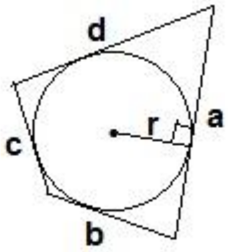
$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot BF$; $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ или $S = MN \cdot BF$.

260) Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между диагоналями:



$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.

261) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то его площадь можно найти по формуле:

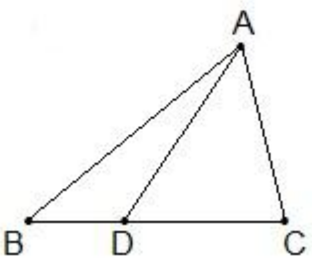


$S = \frac{1}{2} P \cdot r$,
где P – периметр четырёхугольника,
r – радиус вписанной окружности.

262) Площадь любого описанного многоугольника можно найти по формуле:

$S = \frac{1}{2} P \cdot r$, где P – периметр многоугольника, r – радиус вписанной окружности.

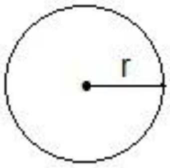
263) Отношение площадей двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия или: *площади подобных многоугольников относятся друг к другу как квадраты их линейных размеров*.

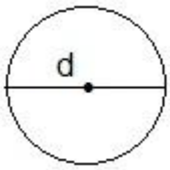
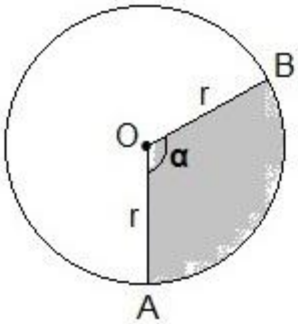


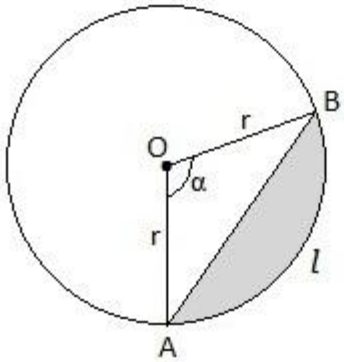
264*) (Теорема Стюарта). Если на стороне BC треугольника ABC взята точка D, то выполняется равенство:

$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD – AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$.

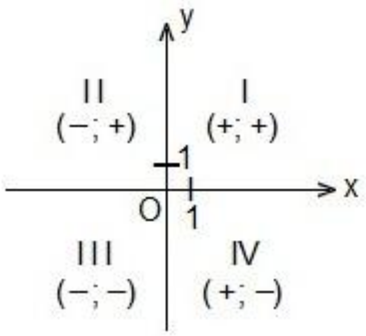
Площадь круга и его частей.

<table>
<tr>
<td>265) Площадь круга вычисляется по формуле:
$S = \pi r^2$, где r – радиус круга.


266) Площадь круга вычисляется по формуле:
$S = \frac{\pi d^2}{4}$, где
d – диаметр круга.

</td>
<td>267) Сектор – это часть круга, ограниченная двумя радиусами. Сектор AOB.


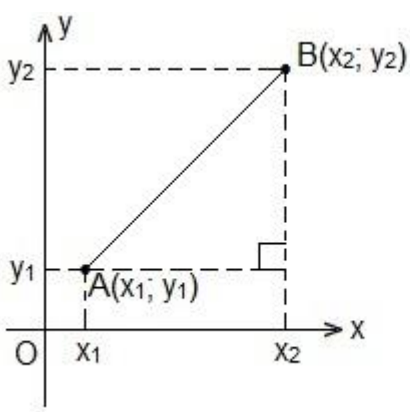
268) Площадь сектора AOB:
$S = \frac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha$,
где r – радиус круга;
α – градусная мера центрального угла AOB.</td>
<td>269) Сегмент – это часть круга, отсекаемая от него хордой (выделенная область).


270) Площадь сегмента:
$S = \frac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha \pm S_\Delta$
(S_Δ-это площадь Δ AOB).
(«-» берут, если α<180°;
«+» берут, если α>180°), ∠AOB=α – центральный угол. Дуга l видна из центра O под углом α.</td>
</tr>
</table>



271) Прямоугольная система координат на плоскости.

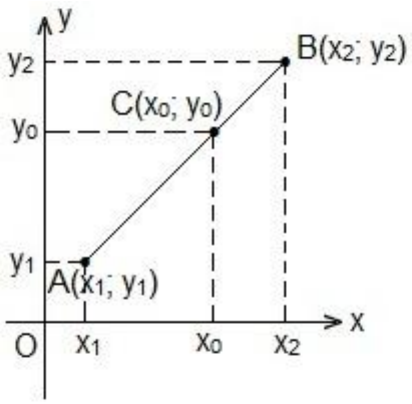
Точка O(0; 0) – начало прямоугольной системы координат. Прямые Ox и Oy, с выбранными на них единичными отрезками, называют осями координат или координатными прямыми. Прямая Ox – это ось абсцисс. Прямая Oy – это ось ординат. Оси координат разбивают координатную плоскость на четыре части, называемые четвертями.



272) Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами.

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда длина отрезка AB вычисляется по формуле:

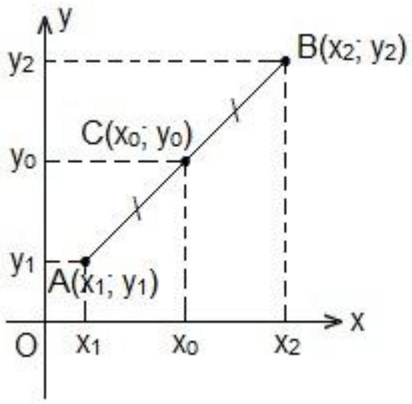
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$



273) Деление отрезка в заданном отношении. Пусть дан отрезок с концами в точках A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2).

Если точка C(x_o; y_o) делит отрезок AB в отношении λ (лямбда), т.е. если $\frac{AC}{BC} = \lambda$, то координаты точки C определяются по формулам:

$x_o = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}$; $y_o = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}$. *В частном случае при λ=1 отрезок AB точкой C разделится пополам.*

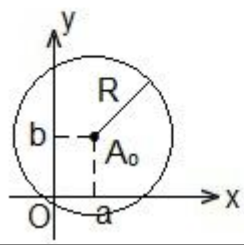
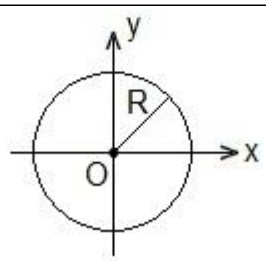


274) Координаты середины отрезка или деление отрезка пополам *(случай при λ=1)*.

Пусть A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2). Точка C(x_o; y_o) делит отрезок AB пополам *($\frac{AC}{BC}$ = 1)*. Координаты точки C(x_o; y_o) вычисляются по формулам:

$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_o = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

275) Уравнением фигуры в декартовых координатах на плоскости называется уравнение с двумя переменными **x** и **y**, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. Обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

	**276)** Уравнение окружности с центром в точке A_o(a; b) и радиусом R имеет вид: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.		**277)** Уравнение окружности с центром в точке O(0; 0) и радиусом R имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

278) Общее уравнение прямой: **a**x + **b**y + **c** = 0, причем, хотя бы один из коэффициентов **a** и **b** должен быть отличен от нуля.

279) <u>Координаты точки пересечения прямых</u> $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ можно найти двумя способами:

1) графическим - построить данные прямые в одной координатной плоскости и определить координаты их общей точки;

2) аналитическим – решить систему уравнений: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ (*)

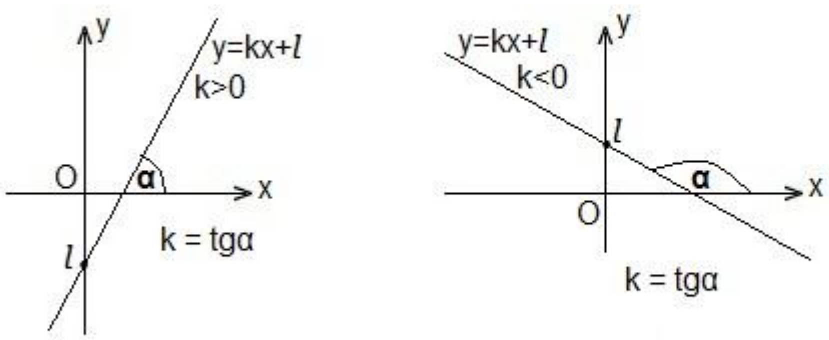
280) Прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ параллельны, если: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. *В этом случае система линейных уравнений (*) не имеет решений.*

281) Прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ совпадают, если: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. *В этом случае система линейных уравнений (*) имеет бесконечное множество решений.*

282) Угловой коэффициент в уравнении прямой.

Если в общем уравнении прямой **a**x + **b**y + **c** = 0 коэффициент **b** при переменной **y** отличен от нуля, то это уравнение можно разрешить относительно **y** (выразить **y** через **x**): $y = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}x - \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$.
Пусть $k = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, $l = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, тогда уравнение прямой примет вид: $y = kx + l$.
Коэффициент **k** называют угловым коэффициентом прямой.

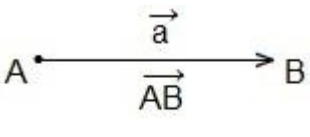
283) Угловой коэффициент **k** прямой, заданной уравнением $y = kx + l$, с точностью до знака равен тангенсу острого угла **α**, который образует прямая с положительным направлением оси Ox, т.е. $k = \text{tg}\alpha$.



284) Прямые $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$.

285) Уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами. Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда уравнение прямой AB получается из равенства: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
Иногда средние члены этой пропорции меняют местами, и равенство принимает вид:
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. *Достаточно запомнить любую из этих двух формул.*

286) <u>Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом **k**, проходящей через заданную точку</u>. Пусть нам известен угловой коэффициент k прямой, проходящей через точку $M(x_1; y_1)$. Тогда уравнение этой прямой имеет вид: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

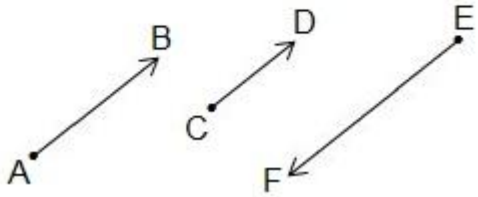


<u>Векторы на плоскости.</u>

287) Вектором называют направленный отрезок. *На рисунке изображён $\vec{a}$ (читают: вектор а) или $\overrightarrow{AB}$ (читают: вектор AB). Начало вектора находится в точке A, конец - в точке B.*

288) Длину отрезка, изображающего вектор, считают длиной (модулем или абсолютной величиной) этого вектора и обозначают $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

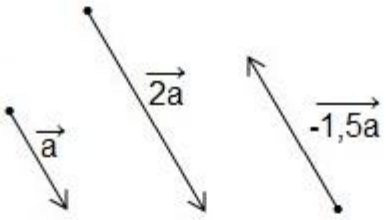
289) Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называют нулевым.



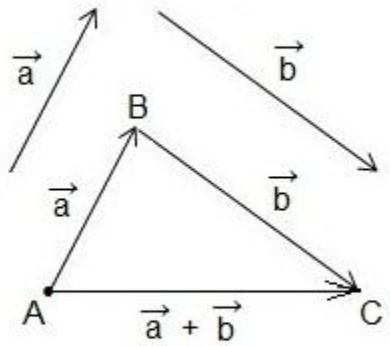
290) Вектор можно отложить от любой точки плоскости.

291) Коллинеарными называют векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, при этом векторы могут быть сонаправленными или противоположно направленными. *На рисунке вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), но противоположно направлен с вектором $\overrightarrow{EF}$ ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$).*

292) Два сонаправленных вектора равны, если равны модули (абсолютные величины или длины) этих векторов.



293) <u>Умножение вектора на число</u> (на скаляр). Абсолютная величина (модуль) вектора $\lambda\vec{a}$ (λ –лямбда) равна $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$. Направление вектора $\lambda\vec{a}$ при $\vec{a} \neq 0$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda<0$. *На рисунке вектор $\overrightarrow{2a}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, так как $\lambda=2>0$. Длина вектора $\overrightarrow{2a}$ вдвое больше длины вектора $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{-1,5a}$ противоположно направлен вектору $\vec{a}$, так как $\lambda = -1,5<0$, а его длина в полтора раза больше длины вектора $\vec{a}$.*

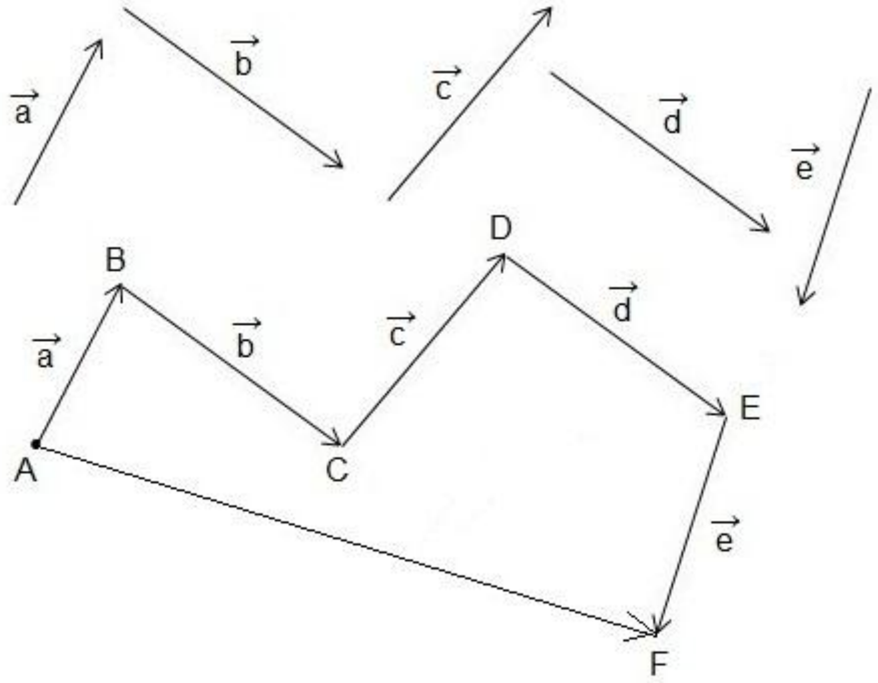


294) <u>Сумма двух векторов</u>. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

294а) Справедлива <u>теорема</u>: каковы бы ни были точки А, В, С, имеет место векторное равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

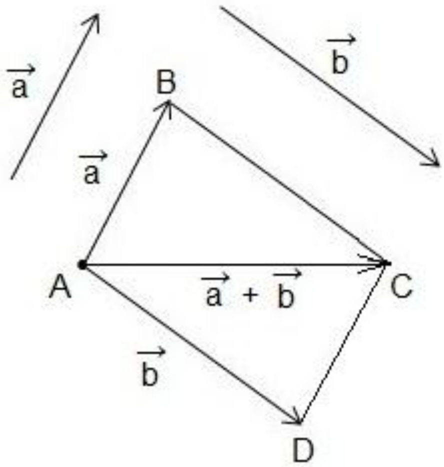
295) <u>Сумма нескольких векторов</u>. Пусть нужно найти сумму пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$. Применим правило треугольника. Отметим произвольную точку А и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Далее от точки С отложим вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\vec{c}$. От точки D отложим вектор $\overrightarrow{DE}$, равный вектору $\vec{d}$. От точки Е отложим вектор $\overrightarrow{EF}$, равный вектору $\vec{e}$. В результате мы получим вектор $\overrightarrow{AF}$, равный сумме пяти данных векторов: $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$. *Начало вектора $\overrightarrow{AF}$ совпадает с началом первого вектора $\vec{a}$, а конец – с концом последнего из слагаемых – вектора $\vec{e}$.*

295а) Справедливо утверждение: каковы бы ни были точки A, B, C, D, E, F имеет место векторное равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$.



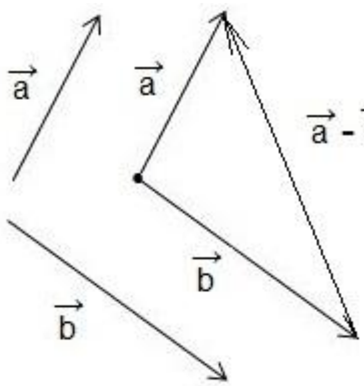
296) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедлив переместительный закон сложения: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

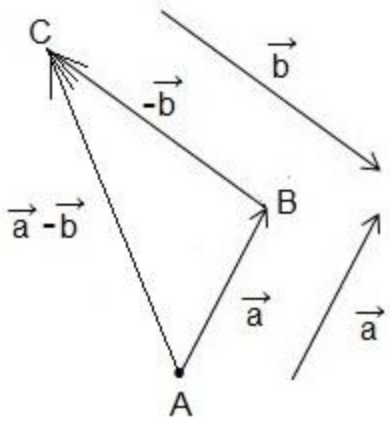
297) Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедлив сочетательный закон сложения:
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



298) <u>Правило параллелограмма</u> для суммы двух векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора, сумму которых нужно найти. Отметим произвольную точку А и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от этой же точки А отложим вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. На векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, как на сторонах, построим параллелограмм ABCD. Вектор $\overrightarrow{AC}$ и есть сумма данных векторов: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

299) Вычитание векторов. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность векторов записывают: $\vec{a} - \vec{b}$. Действительно, если по правилу треугольника к вектору $\vec{b}$ прибавить вектор $(\vec{a} - \vec{b})$, то получится вектор $\vec{a}$.





300) Теорема о разности векторов. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Для построения разности $\vec{a} + (-\vec{b})$ применим правило треугольника. Отметим произвольную точку А и отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $(-\vec{b})$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, т.е. разностью $\vec{a} - \vec{b}$.

9 класс.

Векторы (продолжение).

301) Пусть вектор $\vec{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1; y_1)$, а концом – точку $A_2(x_2; y_2)$. Координатами вектора $\vec{a}$ (или вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$) будем называют числа $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$. Координаты вектора ставят рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\vec{a}\,\{a_1; a_2\}$ или $\overrightarrow{A_1A_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

302) Координаты нулевого вектора равны нулю.

303) Длину (модуль или абсолютную величину) вектора находят по формуле (*272)*, выражающей расстояние между точками через их координаты.

Пусть $\vec{a}\,\{a_1; a_2\}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

Пусть $\overrightarrow{A_1A_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Тогда $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

304) Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.

305) Если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

306) Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами a_1, a_2 и b_1, b_2 называется вектор $\vec{c}$ с координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, т.е. $\vec{a}\{a_1; a_2\} + \vec{b}\{b_1; b_2\} = \vec{c}\{a_1 + b_1; a_2 + b_2\}$.

307) Произведением вектора $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ на число λ называется вектор $\overrightarrow{\lambda a}\{\lambda a_1; \lambda a_2\}$, причём, векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{\lambda a}$ будут коллинеарными (*сонаправлены, если λ > 0 и противоположно направлены, если λ < 0*). Отношения соответственных координат векторов $\overrightarrow{\lambda a}$ и $\vec{a}$ равны λ.

308) Условие коллинеарности векторов $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2\}$. Если отношения соответственных координат двух данных векторов равны, то данные векторы являются коллинеарными, т.е., если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

309) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то выполняется равенство: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

310) Для любого вектора $\vec{a}$ и чисел λ и μ справедливо равенство: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

311) Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа λ справедливо равенство: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

312) Скалярным произведением векторов $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2\}$ называется число, равное сумме произведений соответственных координат данных векторов. Записывают:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. *Выражение* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *читают: скалярное произведение векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

313) Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин (модулей или длин векторов) на косинус угла между ними:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

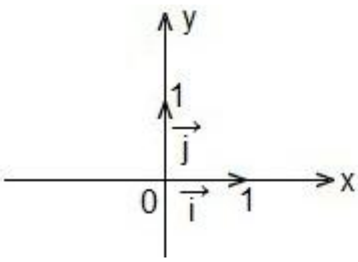
314) Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

315) Если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны, т.е. из условия $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ следует, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

316) Косинус угла между векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}(x_2; y_2\}$ можно найти по формуле:

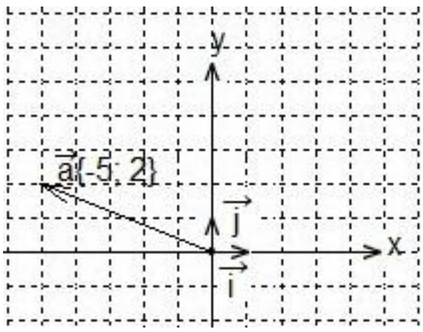
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2)^2+(y_2)^2}}.$$

317) Вектор называется единичным, если его абсолютная величина (модуль или длина вектора) равна единице.



318) Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются координатными векторами или ортами. Вектор $\vec{i}\{1; 0\}$ на оси Ох и вектор $\vec{j}\{0; 1\}$ на оси Оу.

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные векторы или орты.



319) Любой вектор $\vec{a}\{x; y\}$ можно разложить по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:
$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

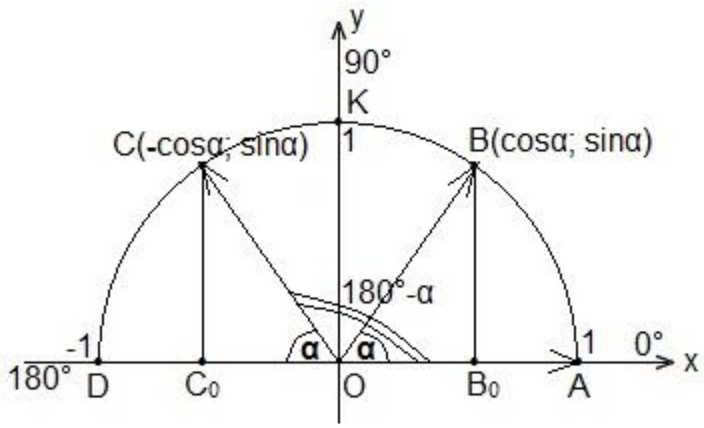
Пример1. Разложить вектор $\vec{a}\{-5; 2\}$, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
Решение. $\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$.

Пример 2. Выписать координаты вектора $\vec{b} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$. *Решение.* $\vec{b}\{4; -7\}$.

320) Любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}.$$

Тригонометрические функции углов в промежутке от 0° до 180°.



Пусть точка В лежит на единичной полуокружности (радиус равен 1) с центром в точке О и диаметром AD, где A(1; 0) и D(-1; 0).

Пусть вектор $\overrightarrow{OB}$ образует угол **α** с положительным направлением оси Ох (или с вектором $\overrightarrow{OA}$).

Проведём $BB_0 \perp OA$ и рассмотрим прямоугольный треугольник BB_0O с острым углом **α**.

По определению косинуса и синуса острого угла прямоугольного треугольника (*169 и 167*)
cosα = $\frac{OB_0}{OB} = \frac{OB_0}{1}$ = OB_0 - это абсцисса точки В; sinα = $\frac{BB_0}{OB} = \frac{BB_0}{1}$ = BB_0 - это ордината точки В.
Вектор $\overrightarrow{OB}${cosα; sinα}. Таким образом, абсцисса вектора $\overrightarrow{OB}$ – это значение косинуса угла **α**, а ордината вектора $\overrightarrow{OB}$ – значение синуса угла **α**.

Отложим угол DOC, равный углу **α**. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}$ образует угол (180°- α) с положительным направлением оси Ох (с вектором $\overrightarrow{OA}$). В прямоугольных треугольниках BB_0O и CC_0O равны гипотенузы OB=OC и острые углы **α**, следовательно, $\Delta\ BB_0O=\Delta\ CC_0O$. Отсюда следует равенство катетов: $C_0O=B_0O$=|cosα| и $CC_0=BB_0$=sinα.

Тогда координаты точки C_0(-cosα; 0), а координаты вектора $\overrightarrow{OC}${-cosα; sinα).
Таким образом, абсцисса вектора $\overrightarrow{OC}$ – это значение косинуса угла (180°- α),
а ордината вектора $\overrightarrow{OC}$ – значение синуса угла (180°- α).

321) sin(180°- α) = sinα **322)** cos(180°- α) = **-**cosα

323) tg(180°- α) = **-**tgα **324)** ctg(180°- α) = **-**ctgα

Координаты точки A(1; 0) – соответственно значения косинуса и синуса угла 0°.

Координаты точки K(0; 1) – соответственно значения косинуса и синуса угла 90°.

Координаты точки D(-1; 0) – соответственно значения косинуса и синуса угла 180°.

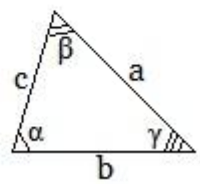
325) Значения тригонометрических функций углов 0°, 90° и 180°.

	0°	**90°**	**180°**
sinα	0	1	0
cosα	1	0	-1
tgα	0	-	0
ctgα	-	0	-

Повторите пункт 189 – таблицу значений тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°.

326) Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов от 0° до 180°.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**-1**
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	**-**	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**-1**	$-\sqrt{3}$	-



327) Теорема синусов. В любом треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

327а) В теореме синусов каждое из трёх отношений $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ равно 2R, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

328) Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

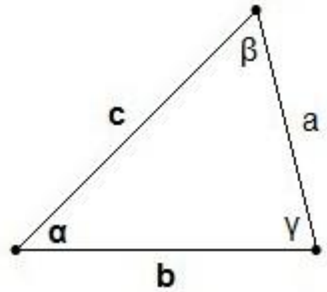
а) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot c \cdot \cos\alpha$

б) $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a \cdot c \cdot \cos\beta$

в) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \cdot b \cdot \cos\gamma$

329) Зная все три стороны треугольника, на основании теоремы косинусов, можно найти косинусы углов треугольника:

а) $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ **б)** $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ **в)** $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



Решение треугольников.

330) Даны две стороны и угол между ними. Найти третью сторону и два остальных угла.

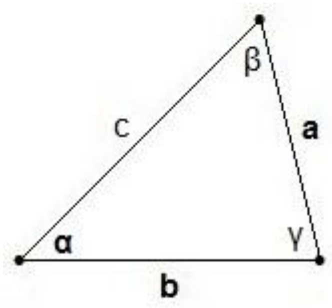
Задача. Пусть даны стороны **b** и **c** и угол **α** между ними. Требуется найти сторону **а** и углы **β** и **γ**. *Решение.*

1) По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot c \cdot \cos\alpha$,
отсюда $a = \sqrt{a^2}$.

2) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ найдём $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$, а затем по таблицам В. М. Брадиса определяем угол β.

3) Третий угол $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$. *Задача решена.*

331) Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них. Найти третью сторону и два остальных угла.



Задача. Пусть даны две стороны **a** и **b** и угол **α**. Требуется найти сторону **c** и углы **β** и **γ**. *Решение.*

1) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$.

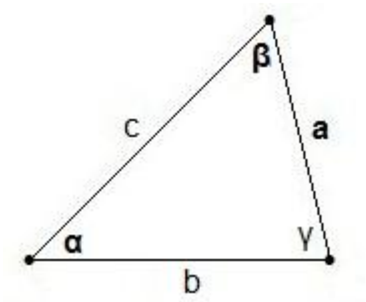
По таблицам В. М. Брадиса находим угол β.

2) Третий угол $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$.

3) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, отсюда $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$ или:

3а) По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \cdot b \cdot \cos\gamma$, отсюда $c = \sqrt{c^2}$. *Задача решена.*

332) Даны сторона и два угла. Найти третий угол и остальные две стороны.

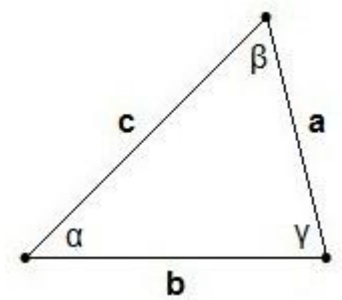


Задача. Пусть дана сторона **a**, противолежащий ей угол **α** и угол **β**. Требуется найти угол **γ** и стороны **b** и **c**.
Решение. 1) $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$.

2) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$.

3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, отсюда $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$. *Задача решена.*

333) Даны три стороны треугольника. Найти углы.



Задача. Пусть даны стороны **a**, **b** и **c**. Требуется найти углы **α**, **β** и **γ**. *Решение*.
1) По формуле (*329а*) найдём косинус угла α.

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Угол α определим по четырёхзначным таблицам В. М. Брадиса.

2) По теореме синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Отсюда $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$.

По таблице находим градусную меру угла β или:

2а) По формуле (*329б*) находим косинус угла β.

$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, а затем по таблице определяем градусную меру угла β.

3) Зная градусные меры углов α и β, найдем угол γ.

γ = 180° - (α+β).   *Задача решена*.

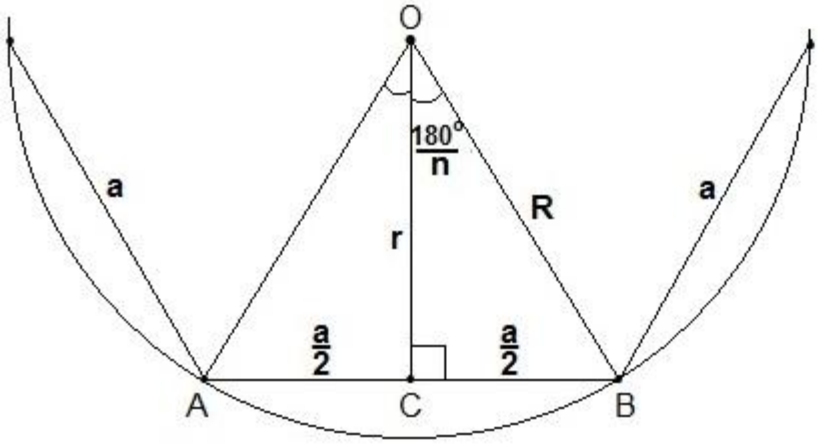
334) Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны. *Повторите (106-114).*

335) Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.

336) Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют один и тот же центр. Его называют центром многоугольника.

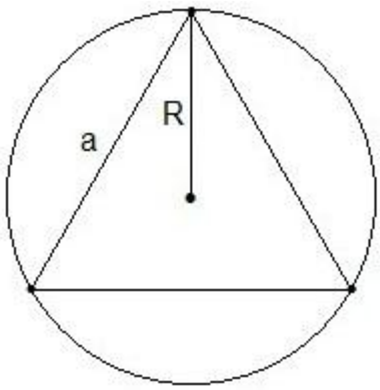
337) Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется центральным углом многоугольника.

Центральный угол (∠AOB) правильного n-угольника равен $\frac{360°}{n}$ *.*

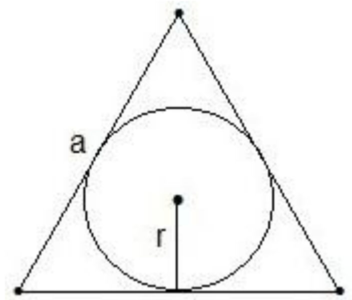


338) Радиус **R** описанной окружности для правильного многоугольника со стороной **a** и числом сторон **n** вычисляют по формуле: $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$.

339) Радиус **r** вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной **a** и числом сторон **n** вычисляют по формуле: $r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$.

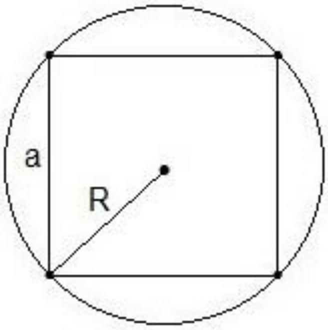


340) $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
Радиус **R** окружности, описанной около правильного треугольника со стороной **a**.
340a) $a = R\sqrt{3}$.



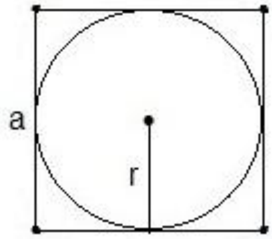
341) $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.
Радиус **r** окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной **a**.

341a) $a = 2r\sqrt{3}$.



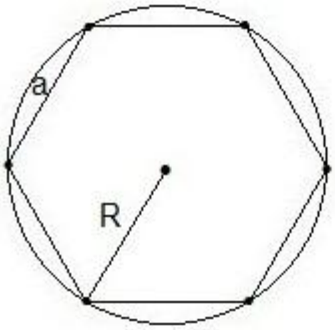
342) R = $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
Радиус **R** окружности, описанной около квадрата со стороной **a**.

342а) a = R$\sqrt{2}$.



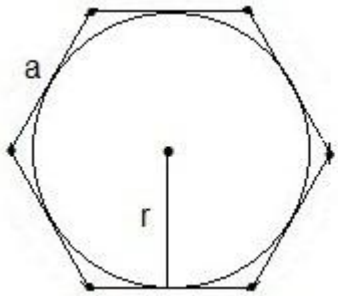
343) r = $\frac{a}{2}$.
Радиус **r** окружности, вписанной в квадрат со стороной **a**.

343а) a = 2r.



344) R = a.

Радиус **R** окружности, описанной около правильного шестиугольника со стороной **a**.
344а) a = R.

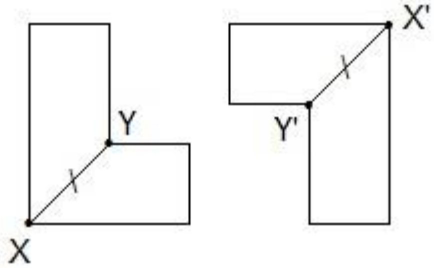


345) r = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Радиус **r** окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной **a**.
345а) a = $\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

346) Правильные выпуклые n-угольники подобны. *Если у них стороны одинаковы, то они равны.*

347) У правильных n-угольников отношения сторон, периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны.
У подобных фигур коэффициент подобия равен отношению соответствующих линейных размеров. У правильных n-угольников такими линейными размерами являются, например, длины сторон, радиусы вписанных и описанных окружностей.

348) Площади подобных n-угольников относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.



349) Движение – это такое преобразование одной фигуры в другую, при котором сохраняется расстояние между точками. Движение переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X’ и Y’ другой фигуры так, что XY=X’Y’.

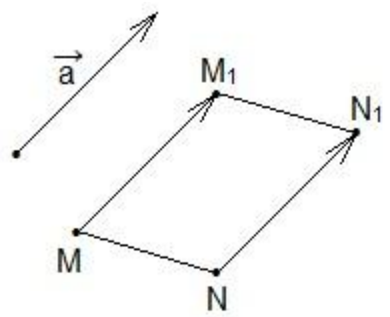
350) Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.

351) Преобразование обратное движению, также является движением.

352) Теорема (свойства движения). Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. *Из теоремы* *следует: при движении прямые переходят в прямые; полупрямые – в полупрямые; отрезки – в отрезки. При движении сохраняются углы между полупрямыми.*

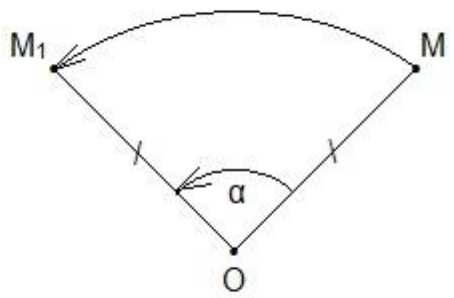
353) Преобразование симметрии относительно прямой является движением. *Повторите осевую симметрию (147 и 148*).

354) Преобразование симметрии относительно точки является движением. *Повторите центральную симметрию (149 и 150*).



355) Параллельный перенос. Пусть $\vec{a}$ – данный вектор. Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$. *На рисунке отрезок MN параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ преобразовался в отрезок M_1N_1.*

356) Параллельный перенос является движением.

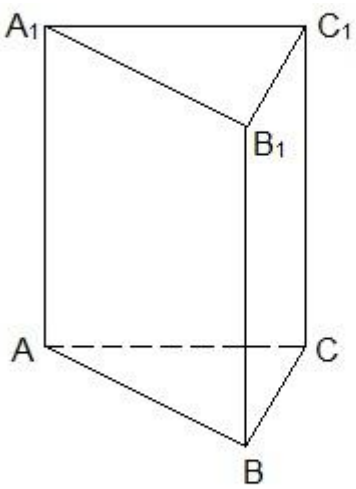


357) Поворот. Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM=OM_1$ и угол MOM_1 равен α. *При повороте фигуры точка O остаётся на месте, а все остальные точки данной фигуры поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки) и на один и тот же угол α. На рисунке изображён поворот точки M на 90° против часовой стрелки.*

358) Поворот является движением.

Многогранники.

В стереометрии изучаются фигуры в пространстве, которые принято называть телами. Любое (геометрическое) тело представляет собой часть пространства, ограниченную некоторыми поверхностями (плоскостями).

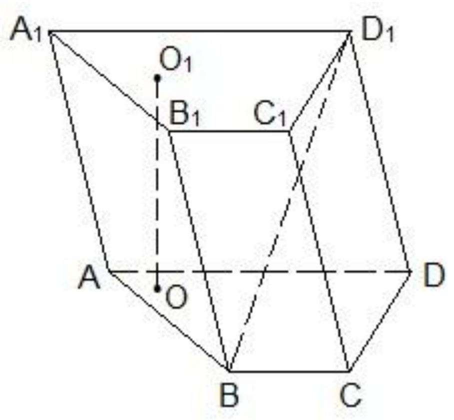


359) Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. *Примеры: прямоугольный параллелепипед, куб, пирамида.*

360) Призма – это многогранник, который состоит из двух равных многоугольников, совмещаемых параллельным переносом, и множества всех отрезков, соединяющих соответственные точки этих многоугольников. Многоугольники называются основаниями призмы, а те отрезки, которые соединяют соответственные вершины оснований, – боковыми рёбрами призмы. Боковые рёбра призмы параллельны и равны. Призма называется n-угольной, если её основания n-угольники. *Пример. Треугольная* *призма $ABCA_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – соответственно нижнее и верхнее основания призмы. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые рёбра призмы, причём, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$.*

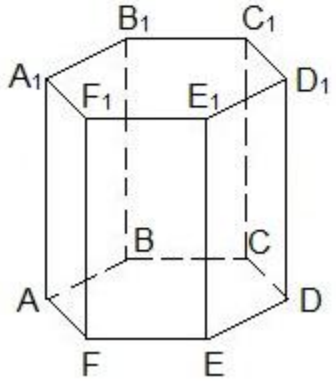
361) Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов. *Боковая поверхность треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ состоит из трёх параллелограммов: AA_1B_1B, BB_1C_1C и ACC_1A_1.*

362) Если боковое ребро призмы перпендикулярно её основанию, то призму называют прямой. В противном случае призма называется наклонной. *Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ – прямая.*



363) Высотой призмы называется расстояние между плоскостями её оснований. Высотой прямой призмы может служить её боковое ребро. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы. *Пример. В четырёхугольной наклонной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит трапеция. Отрезок OO_1 – высота призмы, это расстояние между основаниями призмы (точки O и O_1 лежат в плоскостях оснований). Отрезок BD_1 – диагональ призмы, так как соединяет две вершины B и D_1, не принадлежащие одной грани.*

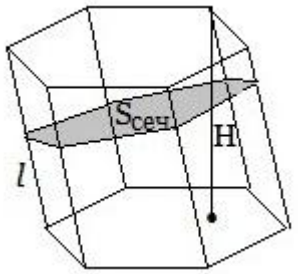
364) Прямую призму называют правильной, если её основаниями являются правильные многоугольники. *Пример. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Основания призмы – равные правильные шестиугольники ABCDEF и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковыми гранями призмы служат равные прямоугольники.*



365) Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т.е. на длину бокового ребра. $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot H$.

366) Полная поверхность любой призмы $S_{полн.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

367) Объём прямой призмы равен произведению площади основания призмы на высоту призмы. $V = S_{осн.} \cdot H$.



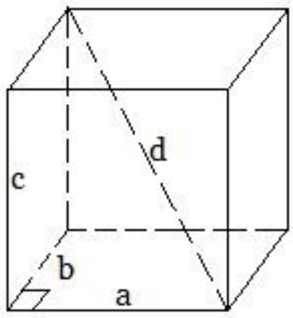
368) Объём наклонной призмы равен произведению площади основания призмы на высоту призмы. $V = S_{осн.} \cdot H$.

369) Объём наклонной призмы равен произведению площади сечения, перпендикулярного боковому ребру, на длину бокового ребра. $V = S_{сеч.} \cdot l$.

370) Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра сечения, перпендикулярного боковому ребру, на длину этого ребра. $S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot l$.

371) Параллелепипед – это призма, в основании которой лежит параллелограмм.

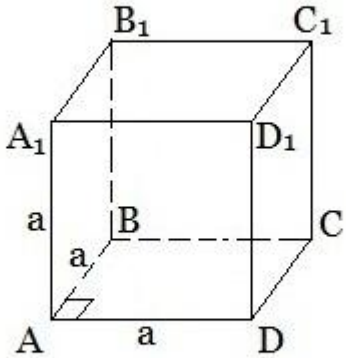
372) Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом.



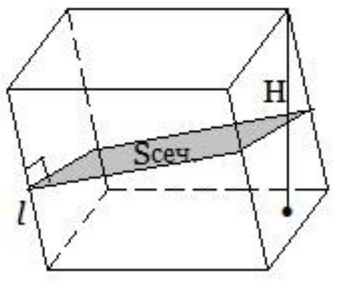
373) Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники; a, b, c – линейные размеры прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина, высота).

374) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
375) Боковая поверхность $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot H$ или $S_{бок.} = 2(a+b)c$.
376) Полная поверхность $S_{полн.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$ или
$S_{полн.} = 2(ab+ac+bc)$.

377) Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений:
$V = abc$.
378) Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту: $V = S_{осн.} \cdot H$.



379) Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называется кубом. *$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, каждое ребро которого равно **a**.*
380) Все грани куба – квадраты со стороной a.
381) Диагональ куба $d = a\sqrt{3}$.
382) Боковая поверхность куба $S_{бок.} = 4a^2$;
383) Полная поверхность куба $S_{полн.} = 6a^2$;
384) Объем куба $V = a^3$.
385) Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. *Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.*
386) Прямым параллелепипедом называют параллелепипед, в основании которого лежит параллелограмм или ромб, а боковое ребро перпендикулярно основанию.
387) Боковая поверхность прямого параллелепипеда $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot H$.
388) Полная поверхность прямого параллелепипеда $S_{полн.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$
389) Объем прямого параллелепипеда $V = S_{осн.} \cdot H$.

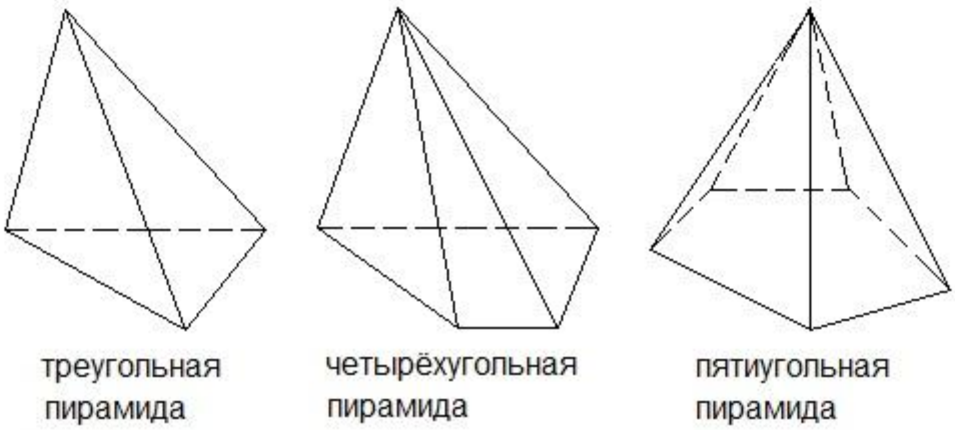


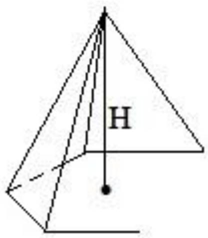
390) Наклонным параллелепипедом называют параллелепипед, в основании которого параллелограмм или прямоугольник или ромб или квадрат, а боковые ребра НЕ перпендикулярны плоскости основания.

391) Объем $V = S_{осн.} \cdot H$

392) Объем $V = S_{сеч.} \cdot l$, где l - боковое ребро, $S_{сеч.}$ - площадь сечения наклонного параллелепипеда, проведенного перпендикулярно боковому ребру l.

393) Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, - вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью её основания и перпендикулярный к этой плоскости, называется высотой пирамиды. Треугольную пирамиду часто называют тетраэдром.





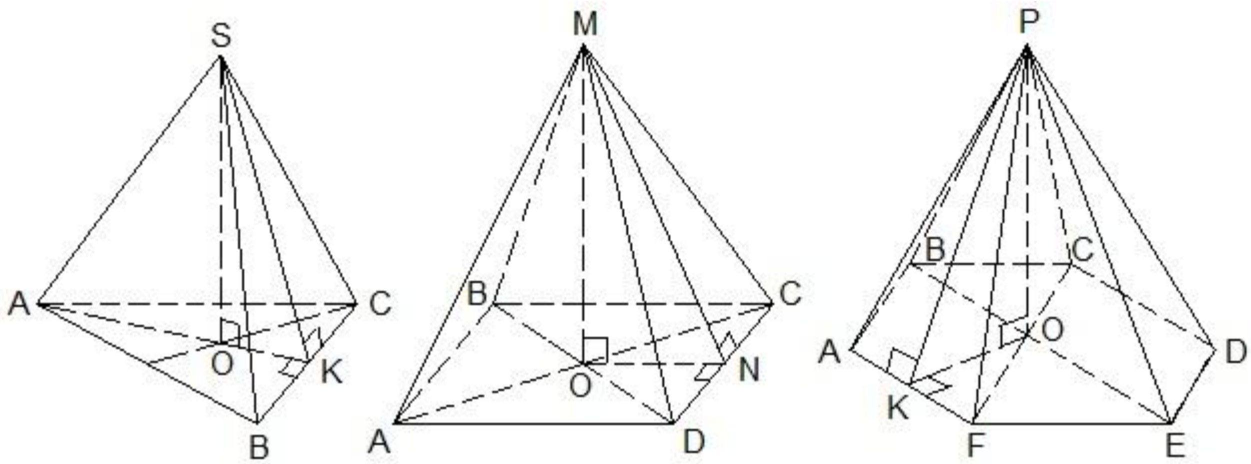
394) Боковая поверхность пирамиды $S_{бок.}$ равна сумме площадей боковых граней пирамиды.

395) Полная поверхность $S_{полн.} = S_{осн.} + S_{бок.}$

396) Объем пирамиды равен произведению одной трети площади основания на высоту. $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$.

397) Правильной называют пирамиду, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр этого многоугольника, т. е. в центр описанной и вписанной окружностей.

398) Апофема l – это высота боковой грани правильной пирамиды.

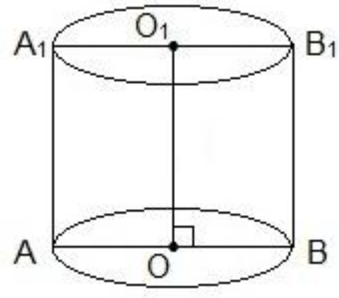


SABC – правильная треугольная пирамида, SO – высота, SK – апофема;
MABCD – правильная четырёхугольная пирамида, MO – высота, MN – апофема;
PABCDEF – правильная шестиугольная пирамида, PO – высота, PK – апофема.

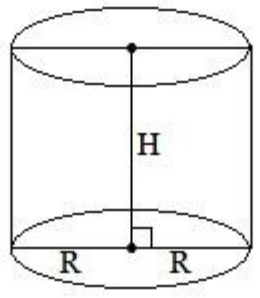
399) Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему. $S_{бок.} = \frac{1}{2}P_{осн.} \cdot l$.

400) <u>Объемы двух подобных тел</u> относятся друг к другу, как кубы их соответствующих линейных размеров.

Тела вращения.



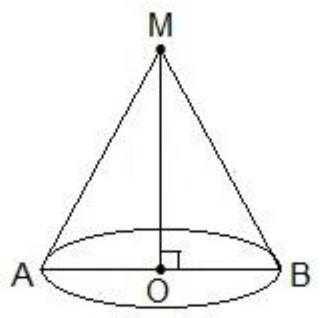
401) Цилиндр (круговой цилиндр) – тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон как вокруг оси. *Прямоугольник AA_1O_1O вращали вокруг стороны OO_1, как вокруг оси. Получили цилиндр с осевым сечением AA_1B_1B. Образующая цилиндра AA_1 (образующую обозначают буквой l). Радиус основания цилиндра AO (радиус обозначают буквой R или r). Высота цилиндра OO_1 (высоту обозначают буквой H или h) равна его образующей.*



402) Развёртка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, одной стороной которого служит AA_1 – высота цилиндра, а длина другой стороны – это длина окружности основания цилиндра. Боковая поверхность цилиндра равна площади её развёртки: $S_{бок.} = 2\pi RH$.

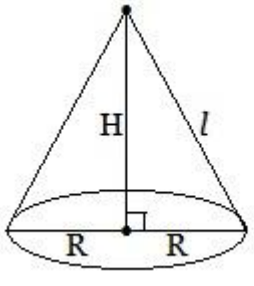
403) Полная поверхность цилиндра $S_{полн.}=2\pi RH+2\pi R^2$ или $S_{полн.}=2\pi R(H+R)$.

404) Объем цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на высоту: $V=\pi R^2H$.



405) Конус (прямой круговой конус) – тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета. *Конус с осевым сечением MAB – тело, которое можно получить вращением прямоугольного треугольника AOM вокруг катета MO как вокруг оси. MA – образующая конуса (образующую обозначают буквой l). Радиус основания конуса AO (радиус обозначают буквой R или r). Высота конуса MO (высоту обозначают буквой H или h).*

406) Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор. Радиус этого сектора равен l - образующей конуса, а длина дуги сектора равна $2\pi R$ - длине окружности основания конуса.



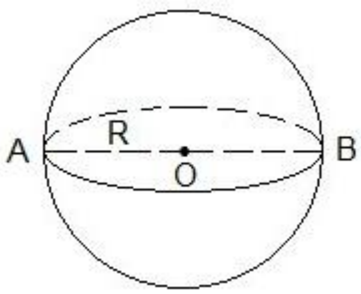
407) Боковая поверхность конуса $S_{бок.} = \pi Rl$, где R – радиус основания, l – образующая конуса.

408) Полная поверхность конуса $S_{полн.} = \pi Rl + \pi R^2$ или $S_{полн.} = \pi R(l+R)$, где R – радиус основания, l – образующая конуса.

409) Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2H$, где l – образующая, R - радиус основания, H – высота конуса.

410) Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.

Сфера и шар.



411) Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии R от данной точки O, называемой центром сферы. Расстояние R – радиус сферы.
На рисунке сфера с центром в точке O и радиусом R = AO.

412) Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы. Диаметр сферы D = 2R. *На рисунке диаметр сферы AB.*

413) Площадь сферы $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

414) Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называется также центром, радиусом и диаметром шара. Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра как вокруг оси.

415) Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

Добро пожаловать:

1) на сайт повторения математики http://www.mathematics-repetition.com/ На странице *Формулы* я публикую информацию о своих новых материалах.

2) на сайт обучающих тестов по математике http://test-training.ru/

3) на сайт подготовки к ОГЭ и ЕГЭ http://oge-ege.info/

Дорогие друзья, я желаю вам успехов в учёбе. Ваши пожелания, отзывы шлите по адресу: at@mathematics-repetition.com